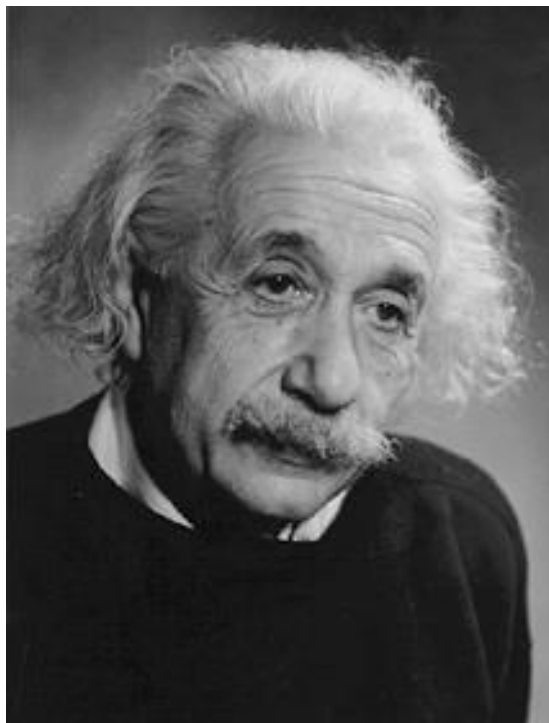
ALBERT EINSTEIN

A TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL E GERAL

Escrito: 1916 (esta edição revisada: 1924)
fonte: Relatividade: Teoria geral e especial ©
Editor 1920: Methuen & Co Ltd
Publicaram Primeiramente: Dezembro, 1916
Traduziu: Carlos Roberto Nogueira de Freitas
Físico – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUCSP
Versão Fora de linha De Sjoerd Langkemper: Arquivo da referência de Einstein (marxists.org) 1999

Prólogo

O presente livro pretende dar uma idéia, a mais exata possível, da Teoria da Relatividade, pensando naqueles que, sem dominar o aparato matemático da física teórica, têm interesse na Teoria do ponto de vista científico e filosófico em geral.

A leitura exige uma formação de próxima do bacharelado em que pese a brevidade do livro e uma boa quantidade de paciência e força de vontade por parte do leitor.

O autor colocou todo o seu empenho em ressaltar com a máxima clareza e sensibilidade suas idéias principais, respeitando no geral, a ordem e o contexto em que realmente surgiram.

No interesse da clareza, me pareceu inevitável repetir-me a miúdo sem reparar no mínimo de elegância expositiva; me ative obstinadamente ao preceito do genial teórico L. Boltzmann, de deixar a elegância para os alfaiates e sapateiros.

As dificuldades que repousam na teoria propriamente dita não creio haver ocultado ao leitor, entretanto, as bases físicas empíricas da teoria as tratei deliberadamente com certa negligência, para que ao leitor distanciado da Física não lhe ocorresse enxergar as árvores sem enxergar o bosque.

Espero que este livro lhes proporcione algumas horas de alegre entretenimento.

Dezembro de 1916.
A. EINSTEIN

NOTAS DO TRADUTOR

Albert Einstein, (1879-1955), físico alemão, desenvolveu a Teoria da Relatividade em duas etapas: em 1905 ele publicou um trabalho que mais tarde ficou conhecido pelo nome de **Teoria da Relatividade Especial**, que tratava o movimento uniforme; e em 1915, publicou a **Teoria da Relatividade Geral**, que tratava o movimento acelerado e a gravitação.

Procurei encaixar notas esclarecedoras para que este livro se torne uma referência para estudantes com dificuldades na Física Relativista.
Procurei texto explicativos disponíveis em diversos autores para tentar facilitar a vida do estudante que inicia sua viagem pela genialidade de Albert Einstein e sua Teoria da Relatividade.

Dois problemas afligiam Einstein:

O primeiro desses problemas referia-se ao comportamento da luz. De acordo com a teoria eletromagnética, a luz é constituída de campos elétricos e magnéticos que oscilam enquanto viajam. Einstein então se perguntava: O que aconteceria se eu acompanhasse um feixe de luz mantendo a mesma velocidade da luz? Ele chegou à seguinte resposta: A luz pareceria algo imóvel e sem alteração. Mas isso lhe pareceu absurdo, pois o que caracteriza a luz é exatamente a alteração continua dos campos; um pulso de luz estático não poderia existir.

O segundo problema que afligia Einstein era a falta de simetria observada em alguns fenômenos eletromagnéticos. Consideremos, por exemplo, o caso representado na figura (1).

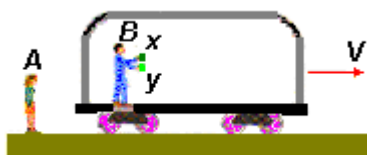



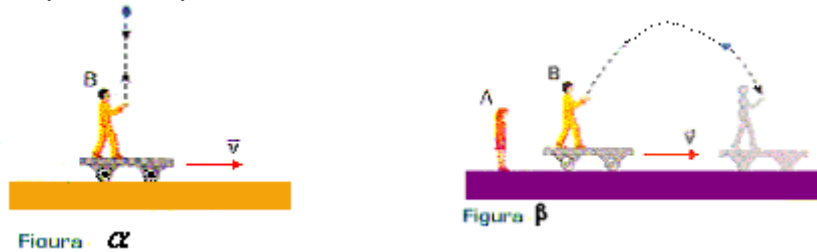
fig. 1

Um indivíduo **A** está fixo no solo e observa um vagão que se move em linha reta e com velocidade constante **v**. Dentro do vagão há um indivíduo **B** que segura duas esferas carregadas **x** e **y**. Suponhamos que a reta que une **x** e **y** seja perpendicular à velocidade do vagão.

Para o indivíduo **B**, as esferas estão em repouso; assim, entre elas existe um par de forças eletrostáticas dadas pela Lei de Coulomb. Porém, para o indivíduo **A**, as esferas movem-se em trajetórias paralelas com velocidade **v**. Assim, para o indivíduo **A**, além das forças dadas pela Lei de Coulomb, há um par de forças magnéticas entre as esferas. Desse modo, a força resultante em cada esfera depende do observador.

Para Einstein, essa conclusão era insuportável, pois na Mecânica isso não ocorria. Quando temos dois referenciais inerciais, um movendo-se com velocidade constante em relação ao outro, as leis da Mecânica são as mesmas nos dois referenciais.

Um experimento mecânico dará o mesmo resultado nos dois referenciais, isto é, por meio de um experimento mecânico, não podemos determinar se o referencial está parado ou em movimento retilíneo uniforme.

Consideremos, por exemplo, o caso abaixo:

Na situação representada na figura α, um indivíduo **B** está sobre um vagão que se move com velocidade constante **v** em relação ao solo. Suponhamos que ele jogue uma bola para cima. A bola subirá e cairá novamente na sua mão, do mesmo modo que subiria e cairia se o vagão estivesse em repouso em relação ao solo. Naturalmente, para um observador **A**, fixo em relação ao solo (fig. β), a trajetória da bola será uma parábola, e a velocidade da bola terá valores diferentes para os dois observadores. No entanto, para os dois observadores a aceleração da bola será a mesma (aceleração da gravidade) e a força resultante sobre a bola será a mesma (o peso). Dentro do vagão, o indivíduo **B** poderá jogar uma partida de pingue-pongue ou peixinhos poderão nadar num aquário do mesmo modo que o fariam se o vagão estivesse em repouso. Nenhum dos experimentos ilustrados pelas figuras α e β poderá revelar se o vagão está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Portanto, ao contrário da Mecânica, as leis do Eletromagnetismo pareciam depender do referencial.

Einstein apresentou a solução desses problemas em um trabalho intitulado "**Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento**", publicado em 1905 numa revista científica alemã chamada Anais da Física. A argumentação de Einstein se desenvolveu a partir de dois postulados, isto é, de duas afirmações consideradas válidas sem necessidade de demonstração. O primeiro desses postulados foi chamado por Einstein de Princípio de Relatividade:

“AS LEIS DA FÍSICA SÃO AS MESMAS EM TODOS OS REFERENCIAIS INERCIAIS.”

Portanto, tanto as leis da Mecânica como as leis do Eletromagnetismo devem ter a mesma forma em qualquer referencial inercial.

O segundo postulado refere-se à velocidade da luz:

“A VELOCIDADE DA LUZ NO VÁCUO TEM O MESMO VALOR *C* EM QUALQUER REFERENCIAL INERCIAL, INDEPENDENTEMENTE DA VELOCIDADE DA FONTE DE LUZ.”

O segundo postulado foi o mais difícil de ser aceito, mesmo por físicos famosos, pois contraria nossa experiência diária. Consideremos, por exemplo, uma situação já analisada por nós no estudo da Mecânica, como a representada na figura **2**.

fig. 2

Nela temos um observador **A**, fixo em relação ao solo, e um vagão movendo-se com velocidade **V** em relação ao solo. Dentro do vagão há uma bola que se move com velocidade $\mathbf{V_B}$ em relação ao vagão. Desse modo, para o indivíduo **B**, que está fixo em relação ao vagão, a velocidade da bola é $\mathbf{V_B}$. No entanto, para o indivíduo A, a velocidade da bola é: $\mathbf{V_B + V}$.

No caso da luz, as coisas são diferentes.

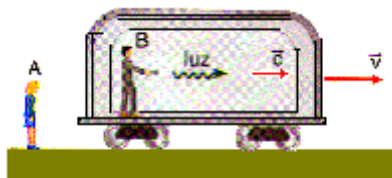



fig. 3

Na figura 3 representamos um observador **A**, fixo em relação ao solo, que observa um vagão cuja velocidade em relação ao solo é **V**. Dentro do vagão um indivíduo **B** acende uma lanterna de modo que, para o observador **B**, a velocidade da luz é ***c***. De acordo com o segundo postulado de Einstein, para o observador **A**, a velocidade da luz emitida pela lanterna também é ***c***, e não ***c* + V**. Tanto para o observador **A** como para o observador **B** a velocidade da luz é ***c***.
O segundo postulado mostra ser desnecessário a proposta da existência de um éter luminoso. Existia em os físicos quase que uma necessidade de um meio para a propagação e manifestação dos fenômenos luminosos, era quase que uma analogia com o som que precisa do ar ou de outro meio material para se propagar.

Esse meio hipotético no qual a luz se propagaria era chamado de éter. Com o segundo postulado, Einstein elimina o éter da Física; segundo ele, a luz pode se

propagar no espaço vazio (vácuo). Durante o século XX, vários experimentos comprovaram a validade do segundo postulado.
Baseado nos dois postulados, Einstein deduziu uma série de conseqüências e, com isso, resolveu alguns dos problemas que afligiam os físicos no fim do século XIX. As mais importantes foram em relação ao tempo, comprimento, massa, energia, matéria, radiação e aos campos elétricos e magnéticos.

Nota do Tradutor

Nosso objetivo foi o de ter uma versão em português que fosse acessível a todo aluno do curso de bacharelado em física.
Procurei todos os exemplos em livros, publicações inclusive na Internet para facilitar o entendimento dos alunos.
Em sites de Portugal, Brasil e Espanha que possuíam informações relevantes sobre a teoria eu retirei informações para facilitar a vida dos alunos.

Toda e qualquer observação, favor enviar para crnfreitas@gamil.com estou a disposição para responder e ajudar em qualquer dúvida sobre o assunto em tela.

Carlos Roberto Nogueira de Freitas

crnfreitas@gmail.com.br

Primeira parte

SOBRE A TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

1. O CONTEÚDO FÍSICO DOS TEOREMAS GEOMÉTRICOS.

Certamente que você também, querido leitor, desde de pequeno, tomou conhecimento do soberbo edifício da Geometria de Euclides e recorda-se, talvez com mais respeito que amor, a imponente construção que pelas altas escadarias te passearam durante horas sem conta os meticulosos professores da cadeira.
E seguramente que, em virtude desse seu passado, castigarias com o desprezo a qualquer um que declarasse falso inclusive, o mais oculto teoreminha desta ciência.
Mas é muito possível que este sentimento de orgulhosa segurança te abandonará de imediato se alguém te perguntar: o que você entende ao afirmar que estes teoremas são verdadeiros?.

Vamos nos deter um instante sobre esta questão.

A Geometria parte de certos conceitos básicos, como plano, ponto, reta, aos que estamos em condição de associar representações mais ou menos claras, assim como de certas proposições simples (axiomas) que, sobre a base daquelas representações, nos inclinamos a dar por verdadeiras.
Todos os demais teoremas são então referidos a aqueles axiomas (é dizer, são demonstrados) sobre a base de um método lógico cuja justificação nos sentimos obrigados a reconhecer.
Um teorema é correto, ou verdadeiro, quando se deriva dos axiomas através desse método reconhecido. A questão da verdade dos distintos teoremas geométricos remete,pois, a da verdade dos axiomas. Entretanto, se sabe desde ha muito que esta última questão não só não é resolúvel com os métodos da Geometria, sem o que nem sequer tem sentido em si . Não se pode perguntar se é verdade ou não que por dois pontos só passa *uma* reta. Unicamente cabe dizer que a Geometria Euclidiana trata de figuras as que chama retas e as quais assinala a propriedade de permanecer univocamente determinadas por dois de seus pontos.
O conceito de verdadeiro não se aplica às proposições da Geometria pura, porque com a palavra verdadeiro podemos designar sempre, em última instância, a coincidência com um objeto real; a Geometria, entretanto, não se ocupa da relação de seus conceitos com os objetos da experiência, somente da relação lógica que guardam estes conceitos entre si.
O que, apesar de tudo, nos sentimos inclinados a qualificar de verdadeiros os teoremas da Geometria tem fácil explicação. Os conceitos geométricos se correspondem, mais ou menos, exatamente com objetos na natureza, que são, sem nenhum gênero de dúvidas, a única causa de sua formação.
Ainda que a Geometria se distancie disto para dar a seu edifício o máximo rigor lógico, o certo é que de costume, por exemplo, ver um segmento como dos

lugares marcados em um corpo praticamente rígido está muito fixo em nossos hábitos de pensamento. E também, estamos acostumados a perceber três lugares como situados sobre una reta quando, mediante adequada eleição do ponto de observação, podemos fazer coincidir suas imagens ao olhar com um só olho.
Se, deixarmos-nos levar pelos hábitos do pensamento, acrescentar agora aos teoremas da Geometria Euclidiana um único teorema porém, o de que a dois pontos de um corpo praticamente rígido[1] lhes corresponde sempre a mesma distancia (segmento), independentemente das variações de posição a que submetemos o corpo, então os teoremas da Geometria Euclidiana se convertem em teoremas referentes às possíveis posições relativas de corpos praticamente rígidos.
A Geometria assim ampliada há que se contemplá-la como um ramo da Física. Agora cabe perguntar-se pela verdade dos teoremas geométricos assim interpretados, porque é possível perguntar se são válidos ou não para aqueles objetos reais que temos assinalado aos conceitos geométricos. Mesmo que com certa imprecisão podemos dizer, pois, que por verdade de um teorema geométrico entendemos neste sentido sua validade em uma construção com régua e compasso. Naturalmente, a convicção de que os teoremas geométricos são verdadeiros neste sentido descansa exclusivamente em experiências plenamente incompletas. De início daremos como hipótese essa verdade dos teoremas geométricos, para logo, na última parte da exposição (A Teoria da Relatividade Geral), ver que essa verdade tem seus limites e precisar quais são estes limites.

[1] Desta maneira se assinala também a linha reta um objeto da natureza. Três pontos de um corpo rígido *A, B, C* se acham situados sobre uma linha reta quando, dados os pontos A e C, o ponto *B* está eleito de tal maneira que a soma das distancias ***AB*** e ***BC*** é a menor possível. Esta definição, defeituosa desde logo, pode bastar neste contexto.

2. O SISTEMA DE COORDENADAS

Baseando-nos na interpretação física da distância que acabamos de assinalar estamos também em condições de determinar a distância entre dois pontos de um corpo rígido por meio de medições. Para ele necessitamos um segmento (**haste *S***) que possamos utilizar uma vez para sempre e que sirva de medida unitária. Se **A** e ***B*** são dois pontos de um corpo rígido, sua reta de união é então construível segundo as leis da Geometria; sobre esta reta de união, e a partir de ***A**,* levamos o segmento ***S*** tantas vezes como seja necessário para chegar a ***B**.* O número de repetições desta operação é a medida do segmento ***AB**.* Sobre este descansa toda medição de comprimento[2].
Qualquer descrição espacial do lugar de um evento ou de um objeto consiste em especificar o ponto de um corpo rígido (corpo de referência) com o qual coincide o evento, e este vale não só para a descrição científica, sendo também para a vida cotidiana. Analisou-se a especificação do lugar – em Berlim, na Praça de Potsdam –, o que significa o seguinte: o solo terrestre é o corpo rígido a que se refere a especificação de lugar; sobre ela, Praça de Potsdam em Berlim, está um ponto marcado, provido de nome, com o qual coincide espacialmente o evento[3]**.**
Este primitivo modo de localização só atende a lugares situados na superfície de corpos rígidos e depende da existência de pontos distinguíveis sobre aquela.
Vejamos como o gênio humano se libera destas duas limitações sem que a essência do método de localização sofra modificação alguma. Se sobre a Praça de Potsdam flutua por exemplo uma nuvem, sua posição, referida na superfície terrestre, caberá fixá-la sem mais que erigir na praça um mastro vertical que chegue até a nuvem. A comprimento do mastro medido com a haste unitária, junto com a especificação do lugar que ocupa o pé do mastro, constitui então uma localização completa. O exemplo nos mostra de que maneira se foi refinando o conceito de lugar:
a) Prolonga-se o corpo rígido a que se refere a localização, de modo que o corpo rígido ampliado chegue até o objeto a localizar.
b) Para a caracterização do lugar se utiliza *números,* e não a nomenclatura de pontos notáveis (no caso anterior, a comprimento do mastro medida com a haste).
c) Segue-se falando da altura da nuvem ainda quando não se erija um mastro que chegue até ela. No nosso caso, determina-se, mediante fotografias da nuvem de diversos pontos do solo e tendo em conta as propriedades de propagação da luz, que comprimento se haveria que dar ao mastro para chegar à nuvem.
Destas considerações uma encontra-se abaixo para ver que aquela a descrição dos lugares é vantajosa se tornar independente da existência dos pontos chaves,

---

[2] Se por hipótese, entretanto, que a medição é exata, é dizer, que dá um número inteiro. Desta dificuldade se desfaz empregando-se escalas subdivididas, cuja introdução não exige nenhum método fundamentalmente novo.

[3] Não é preciso entrar aqui com mais detalhamento do significado de coincidência espacial, pois este conceito é claro na medida em que, em um caso real, apenas haveria divisão de opiniões em torno de sua validade.

fornecido com os nomes e localizados no corpo rígido a que posição, e usar-se em vez dele números. A Física experimental cabe este objetivo empregando o sistema de coordenadas cartesianas.
Este sistema consta de três paredes rígidas, planas, perpendiculares entre si e unidas a um corpo rígido. O lugar de qualquer acontecimento, referido ao sistema de coordenadas, vem descrito (em essência) pela especificação do comprimento das três verticais ou coordenadas (**x, y, z**) (**cf. Fig. 8, p. 26**) que podem traçar-se desde o acontecimento até essas três paredes. Os comprimentos destas três perpendiculares podem determinar-se mediante uma sucessão de manipulações com réguas rígidas, manipulações que vêm prescritas pelas leis e métodos da Geometria euclidiana. Nas aplicações não costumam construir-se realmente essas paredes rígidas que formam o sistema de coordenadas; e as coordenadas também não se determinam realmente por meio de construções com réguas rígidas, senão indiretamente. Mas o sentido físico das localizações deve procurar-se sempre em concordância com as considerações anteriores, sob pena de que os resultados da Física e a Astronomia se diluam na falta de clareza[4].
A conclusão é, conseqüentemente, a seguinte: toda a descrição do espaço dos eventos serve-se de um corpo rígido para referi-los espacialmente. Essa referência pressupõe que os "segmentos" são governados pelas leis da Geometria Euclidiana, vindo representá-los fisicamente por duas marcas sobre um corpo rígido.

NOTAS DO TRADUTOR

A RELATIVIDADE DO TEMPO

Vamos supor que queiramos medir o intervalo de tempo gasto para ocorrer um fenômeno. Uma das conseqüências dos postulados de Einstein é que o valor desse intervalo de tempo vai depender do referencial em que está o observador. Se tivermos dois observadores situados em dois referenciais inerciais diferentes, um tendo velocidade constante em relação ao outro, os intervalos de tempo medidos por esses observadores serão diferentes. Para demonstrar isso, consideremos as situações abaixo.

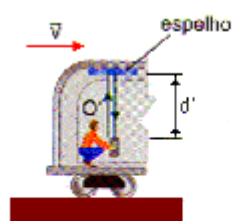
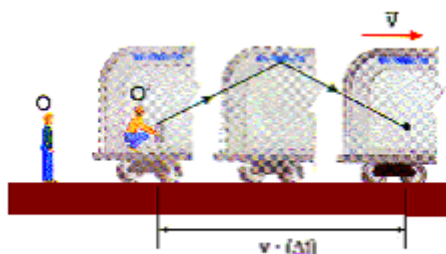



Figura 4 Figura 5

[4] Está na Teoria do Relatividade Geral, estudada na segunda parte do livro, onde um se torna necessário para refinar e modificar esta concepção.

Nas figuras **4** e **5** representamos um trem que se move com velocidade constante **V** em relação ao solo. Dentro do vagão há um observador **O'**, fixo em relação ao vagão, e fora dele há um observador **O**, fixo em relação ao solo.

O observador **O'** (fig. **a**) aciona uma fonte de luz que emite um pulso para cima. Esse pulso é refletido por um espelho e volta para a fonte. Para o observador **O'**, na ida e na volta o pulso de luz gasta um intervalo de tempo **Δt'** dado por:

$$2d' = c \cdot (\Delta t')$$

Eq.I

em que ***c*** é a velocidade da luz.

Na figura **b** representamos o trajeto da luz como é visto pelo observador **O**, o qual mede um tempo **Δt** para o percurso da luz. Nesse intervalo de tempo, para o observador **O** o deslocamento do trem foi igual a **V.(Δt)** enquanto o deslocamento da luz (fig. **6**) foi:

$$2d = c \cdot (\Delta t)$$

Eq. II

pois a velocidade da luz é a mesma (***c***) para os dois observadores.

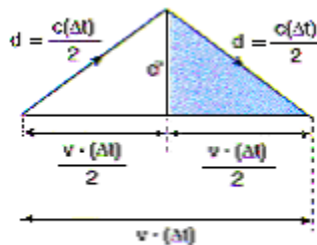



Figura 6

Das equações **I** e **II**, obtemos:

$$2d' = c.(\Delta t) \rightarrow \Delta t' = 2d' / c$$

$$2d = c.(\Delta t) \rightarrow \Delta t = 2d / c$$

Como **d' < d**, temos: $\Delta t' < \Delta t$

Daí podemos concluir que um relógio que está em um referencial que se move em relação a nós "anda" mais devagar do que nosso relógio.

Essa relação vale para todos os processos físicos, incluindo reações químicas e processos biológicos.

O intervalo de tempo **Δt'**, em que os dois eventos (emissão e recepção de luz) ocorrem no mesmo local, é chamado de tempo próprio. Para qualquer outro referencial inercial o intervalo de tempo **(Δt)** é maior do que o tempo real.

Vamos agora encontrar uma equação que relacione **Δt** com **Δt'**. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo sombreado na figura **c**, temos:

$$d^2 = (d')^2 + \left[\frac{v \cdot (\Delta t)}{2}\right]^2$$

$$\text{ou: } \left[\frac{c \cdot (\Delta t)}{2}\right]^2 = \left[\frac{c \cdot (\Delta t')}{2}\right]^2 + \left[\frac{v \cdot (\Delta t)}{2}\right]^2$$

$$c^2(\Delta t)^2 = c^2(\Delta t')^2 + v^2(\Delta t)^2$$

$$c^2(\Delta t)^2 - v^2(\Delta t)^2 = c^2(\Delta t')^2$$

$$(c^2 - v^2)(\Delta t)^2 = c^2(\Delta t')^2$$

$$\Delta t^2 = \frac{c^2(\Delta t')^2}{c^2 - v^2}$$

$$\Delta t^2 = \frac{c^2(\Delta t')^2}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$(\Delta t)^2 = \frac{(\Delta t')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Uma das primeiras evidências da dilatação temporal foi obtida por meio de experimentos com uma partícula chamada múon. Quando fazemos experimentos no laboratório com múons em repouso, observamos que eles se desintegram com uma vida média de **2,2 . l0^{-6} s**. Muitos múons são criados na alta atmosfera, como resultado do bombardeio dos raios cósmicos. Esses múons movem-se com velocidade próxima da luz:

$$\mathbf{v} = 2{,}994 \,.10^8 \text{ m/s}$$

Portanto, entre o momento em que são criados e o momento em que se desintegram, deveriam percorrer, em média, uma distância de:

$$\mathbf{d = v \,.\, (\Delta t\,)}$$

$$\mathbf{d} = (\,2{,}994 \,.\, 10^8 \text{ m / s}\,) \,.\, (2{,}2 \,.\, 10^{-6} \text{ s})$$

$$\mathbf{d} = 650 \text{ m}$$

No entanto, a experiência mostra que múons criados a quase l0 km de altitude são detectados na superfície da Terra. Isso acontece por causa da dilatação temporal. Para um referencial fixo no múon, o tempo de desintegração é:

$$\Delta \mathbf{t'} = 2{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Para um referencial fixo na Terra, temos:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Como:

$$\frac{v}{c} \cong \frac{2{,}994 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \cong 0{,}998$$

$$\frac{v^2}{c^2} \cong (0{,}998)^2 = 0{,}996$$

Assim:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong \sqrt{1 - 0{,}996} \cong 0{,}063$$

Portanto:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}}{0{,}063}$$

$$\Delta t \cong 35 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Assim, para um observador na Terra, a distância percorrida pelo múon antes de desintegrar-se é:

$$\mathbf{\Delta = v \cdot (\Delta t)}$$

$$\Delta = (2{,}994 \cdot 10^8 \text{ m / s}) \cdot (35 \cdot 10^{-6} \text{ s})$$

$$\Delta = 10.000 \text{ m}$$

Outro tipo de teste, consistiu em comparar relógios atômicos, que marcam intervalos de tempo muito pequenos. Um foi mantido no solo, enquanto outro foi colocado em um avião que percorreu uma grande distância a uma grande velocidade em relação à Terra. Terminado o vôo, os relógios foram comparados e constatou-se que o relógio do avião estava ligeiramente atrasado em relação ao relógio que foi mantido no solo.

3. ESPAÇO E TEMPO NA MECÂNICA CLÁSSICA

Se eu formular o objetivo da Mecânica dizendo que "a Mecânica deve descrever como varia com o tempo a posição dos corpos no espaço", sem adicionar grandes reservas e prolixas explanações, carregaria em minha consciência alguns pecados capitais de encontro ao sagrado espírito da clareza. Indiquemos antes de mais nada estes pecados.

Não está claro que deve-se entender aqui por posição e espaço. Suponhamos que estou postado junto a uma janela de um vagão de trem que se desloca com uma marcha uniforme, e deixo cair uma pedra na estrada, sem dar nenhum impulso. Então vejo (desprezando a influência da resistência do ar) que a pedra cai em linha reta. Um pedestre que assista a esta barbaridade, de um ponto do barranco observa que a pedra cai na terra segundo um arco de parábola. Eu pergunto agora: as posições que percorre a pedra estão realmente sobre uma reta ou sobre uma parábola? Por outro lado, o que significa aqui o movimento no espaço? A resposta é evidente depois do afirmado na seção 2. Deixemos, por um momento, de lado a obscura palavra espaço, que, para ser sincero, não nos diz absolutamente nada; no lugar dela coloquemos movimento com respeito a um corpo de referência praticamente rígido. As posições com relação ao corpo de referência (vagão do trem ou a estrada) haviam sido definidas explicitamente na seção precedente. Introduzindo no lugar de corpo de referência o conceito de sistema de coordenadas, que é útil para a descrição matemática, podemos dizer: a pedra descreve, com relação a um sistema de coordenadas rigidamente unido ao vagão, uma reta; com relação a um sistema de coordenadas rigidamente ligado a estrada, uma parábola. Neste exemplo se vê claramente que a rigor não existe uma trajetória[5], mas somente uma trajetória com relação a um determinado corpo da referência.

Bem agora, a descrição *completa* do movimento não se obtém se não se especificar como régua a posição do corpo *com o tempo,* o que é o mesmo, para cada ponto da trajetória há que se indicar ali, em qual momento se encontra o corpo.

Estes dados há que completar-los com uma definição do tempo em virtude da qual possamos considerar estes valores temporais como magnitudes essencialmente observáveis (resultados de medições). Nós, sobre o solo da Mecânica Clássica, satisfazemos esta condição - com relação ao exemplo anterior - da seguinte maneira. Imaginemos dois relógios exatamente iguais; um deles de posse do homem da janela do vagão; o outro, o homem que está de pé no barranco.

Cada um deles verifica em que lugar do correspondente corpo de referência se encontra a pedra em cada instante marcado pelo relógio que tem na mão.

Nos abstivemos de entrar aqui na imprecisão introduzida pelo caráter finito da velocidade de propagação da luz. Sob este extremo, e sob uma segunda dificuldade que aqui se apresenta, falaremos detidamente mais adiante.

---

[5] É dizer, uma curva ao longo da qual se move o corpo.

4. O SISTEMA DE COORDENADAS DE GALILEU

Como é sabido, a lei fundamental da Mecânica de Galileu e Newton, conhecida como a lei de inércia, diz: um corpo suficientemente separado de outros corpos persiste em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme. Este princípio se pronuncia não só sobre o movimento dos corpos, como também sobre corpos de referência ou sistemas de coordenadas são permissíveis na Mecânica e podem utilizar-se nas descrições mecânicas. Alguns dos corpos aos que sem dúvida cabe aplicar com grande aproximação a lei da inércia são as estrelas fixas. Agora, se utilizamos um sistema de coordenadas solidário com a Terra, cada estrela fixa descreve, com relação a ele e ao longo de um dia (astronômico), uma circunferência de raio enorme, em contradição com o enunciado da lei de inércia. Assim pois, se um se atém a esta lei, então os movimentos só cabe referir-los a sistemas de coordenadas com relação aos quais as estrelas fixas não executam movimentos circulares. Um sistema de coordenadas cujo estado de movimento é tal que com relação a ele é válida a lei de inércia o chamamos sistema de coordenadas de Galileu. As leis da Mecânica de Galileu – Newton só tem validade para sistemas de coordenadas de Galileu.

5. O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE (EM SENTIDO RESTRITO)

Para conseguir a maior clareza possível, voltemos ao exemplo do vagão de trem que está em uma marcha uniforme. Dizemos que seu movimento dizemos é uma translação uniforme (uniforme, porque são de velocidade e direção constantes; translação, porque ainda que a posição do vagão varie com respeito à via, não executa nenhum giro).

Suponhamos que pelos ares voa um corvo em linha reta e uniformemente (com respeito à via). Não há dúvida de que o movimento do corvo é — com respeito ao vagão em marcha — um movimento de diferente velocidade e diferente direção, mas segue sendo retilíneo e uniforme. Expresso de modo abstrato: se uma massa ***m*** se move em linha reta e uniformemente com respeito a um sistema de coordenadas **K**, então também se move em linha reta e uniformemente com respeito a um segundo sistema de coordenadas **K'**, sempre que este execute com respeito a **K** um movimento de translação uniforme. Tendo em conta o afirmado no parágrafo anterior, depreende-se daqui o seguinte:

Se **K** é um sistema de coordenadas de Galileu, então também o é qualquer outro sistema de coordenadas **K'** que com respeito a **K** se ache num estado de translação uniforme. As leis da Mecânica de Galileu-Newton valem tanto com respeito a **K'** como com respeito a **K** Demos um passo a mais na generalização e enunciemos o seguinte princípio: Se **K'** é um sistema de coordenadas que se move uniformemente e sem rotação com respeito a **K**, então os fenômenos naturais decorrem com respeito a **K'** segundo idênticas leis gerais que com respeito a **K**. Esta proposição é o que chamaremos o Princípio de Relatividade (no sentido restrito).

Enquanto se manteve a crença de que todos os fenômenos naturais podiam ser representados com ajuda da Mecânica Clássica, não se podia acreditar na validade do Princípio do Relatividade. No entanto, os recentes progressos da Eletrodinâmica e da Ótica fizeram ver cada vez mais claramente que a Mecânica Clássica, como base de toda descrição física da natureza, não era suficiente. A questão da validade do Princípio de Relatividade se tornou assim perfeitamente discutível, sem excluir a possibilidade de que a solução fosse em sentido negativo.

Existem, contudo, dois fatos gerais que primeiramente falam muito a favor da validade do Princípio da Relatividade.

Efetivamente, ainda que a Mecânica Clássica não proporcione uma base suficientemente ampla para representar teoricamente todos os fenômenos físicos, possui um conteúdo de valor muito importante, pois dá com admirável precisão os movimentos reais dos corpos celestes. Daí que no campo da Mecânica tenha que ser válido com grande exatidão o Princípio de Relatividade. E que um princípio de generalidade tão grande e que é válido, com tanta exatidão, em um determinado campo de fenômenos fracasse em outro campo é, a priori é pouco provável.

O segundo argumento, sobre o que voltaremos mais adiante, é o seguinte: se o Princípio da Relatividade (em sentido restrito) não é válido, então os sistemas de coordenadas de Galileu **K**, **K'**, **K"**, etc., que se movem uniformemente uns com respeito aos outros, não serão equivalentes para a descrição dos fenômenos naturais. Nesse caso não teríamos mais remédio senão pensar que as leis da

natureza só podem formular-se com especial singeleza e naturalidade se dentre todos os sistemas de coordenadas de Galileu elegêssemos como corpo de referência um (**K_0**) que tivesse um estado de movimento determinado. A este o qualificaríamos, e com razão (por suas vantagens para a descrição da natureza), de absolutamente em repouso, enquanto dos demais sistemas galileanos **K** diríamos que são móveis. Se a via fosse o sistema **K_0**, ponhamos por caso, então nosso vagão de transporte ferroviário seria um sistema **K** com respeito ao qual regeriam leis menos singelas do que com respeito a **K_0**. Esta menor simplicidade teria que atribuir que o vagão **K** se move com respeito a **K_0** (isto é, realmente). Nestas leis gerais da natureza formuladas com respeito a **K** teriam que desempenhar um papel o módulo e a direção da velocidade do vagão.
Seria de esperar, por exemplo, que o tom de um tubo de órgão fosse diferente quando seu eixo fosse paralelo à direção de marcha do que quando estivesse perpendicular. Agora , a Terra, devido a seu movimento orbital arredor do Sol, é equiparável a um vagão que viaja a uns 30 km por segundo. Portanto, no caso de não ser válido o Princípio de Relatividade, seria de esperar que a direção instantânea do movimento terrestre interviesse nas leis da natureza e que, portanto, o comportamento dos sistemas físicos dependesse de sua orientação espacial com respeito à Terra; porque, como a velocidade do movimento de rotação terrestre varia de direção em decorrência do ano, a Terra não pode estar todo o ano em repouso com respeito ao hipotético sistema **K_0**.
Pese o esmero que se há posto em detectar uma tal anisotropia do espaço físico terrestre, isto é, uma não equivalência das diferentes direções, jamais pôde ser observada. O qual é um argumento de importância a favor do Princípio da Relatividade.

6. O TEOREMA DE ADIÇÃO DE VELOCIDADES SEGUNDO A MECÂNICA CLÁSSICA

Suponhamos que nosso tão trazido e levado vagão de transporte ferroviário viaja com velocidade constante v pela linha, e imaginemos que por seu interior caminha um homem na direção de marcha com velocidade w. Com que velocidade W avança o homem com respeito à via ao caminhar? A única resposta possível parece depreender-se da seguinte consideração: se o homem ficasse parado durante um segundo, avançaria, com respeito à via, um trecho v igual à velocidade do vagão. Mas nesse segundo percorre além do mais, com respeito ao vagão, e por tanto também com respeito à via, um trecho w igual à velocidade com que caminha. Portanto, nesse segundo avança ao todo o trecho com respeito à via

$$W = v + w$$

Mais adiante veremos do que este raciocínio, que expressa o teorema de adição de velocidades segundo a Mecânica Clássica, é insustentável e que a lei que acabamos de escrever não é válida na realidade. Mas entretanto, vamos supor a sua exatidão.

7. A APARENTE INCOMPATIBILIDADE DA LEI DE PROPAGAÇÃO DA LUZ COM O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE

Não há na física uma lei mais singela do que a de propagação da luz no espaço vácuo. Qualquer estudante sabe (ou crê saber) que esta propagação se produz em linha reta com uma velocidade de ***c*** = 300.000 km/s. Em qualquer caso, sabemos com grande exatidão que esta velocidade é a mesma para todas as cores, porque se não fora assim, o mínimo de emissão no eclipse de uma estrela fixa por sua colega escura não se observaria simultaneamente para as diversas cores. Através de um raciocínio similar, relativo a observações das estrelas duplas, o astrônomo holandês De Sitter conseguiu também demonstrar que a velocidade de propagação da luz não pode depender da velocidade do movimento do corpo emissor.

A hipótese de que esta velocidade de propagação depende da direção no espaço é de todo improvável. Suponhamos, em resumo, que o estudante crê justificadamente na singela lei da constância da velocidade da luz ***c*** (no vácuo). Quem diria que esta lei tão simples colocou os físicos mais conceituados em grandíssimas dificuldades conceituais? Os problemas surgem do modo seguinte.

Como é natural, o processo da propagação da luz, como qualquer outro, há que se referir a um corpo de referência rígido (sistema de coordenadas). Voltamos a eleger como tal as vias do trem e imaginamos que o ar que tinha acima delas o eliminamos por bombeamento. Suponhamos que ao longo do barranco se emite um raio de luz cujo vértice, segundo o anterior, propaga-se com a velocidade ***c*** com respeito àquele. Nosso vagão de transporte ferroviário segue viajando com a velocidade ***v***, na mesma direção em que se propaga o raio de luz, mas naturalmente bem mais devagar. O que nos interessa averiguar é a velocidade de propagação do raio de luz com respeito ao vagão. É fácil ver que o raciocínio da seção anterior tem aqui aplicação, pois o homem que corre com respeito ao vagão desempenha o papel do raio de luz. Em lugar de sua velocidade ***W*** com respeito ao barranco aparece aqui a velocidade da luz com respeito a este; a velocidade ***w*** que procuramos, a da luz com respeito ao vagão, é por tanto igual a:

$$w = c - v$$

Por conseguinte, a velocidade de propagação do raio de luz com respeito ao vagão resulta ser menor do que ***c***. Agora , este resultado atenta contra o Princípio da Relatividade exposto no seção 5, porque, segundo este princípio, a lei de propagação da luz no vácuo, como qualquer outra lei geral da natureza, deveria ser a mesma se tomamos o vagão como corpo de referência que elegemos as vias, o qual parece impossível segundo nosso raciocínio. Se qualquer raio de luz se propaga com respeito ao barranco com a velocidade ***c***, a lei de propagação com respeito ao vagão parece que tem que ser, por isso mesmo, outra diferente... em contradição com o Princípio da Relatividade. À vista do dilema parece inevitável abandonar, ou bem o Princípio da Relatividade, ou bem a singela lei da propagação da luz no vácuo. O leitor que tenha seguido atenciosamente as considerações anteriores esperará seguramente que seja o Princípio de

Relatividade — que por sua naturalidade e singeleza se impõe à mente como algo quase inevitável — ou que se mantenha em pé, substituindo em troca a lei da propagação da luz no vácuo por uma lei mais complicada e compatível com o Princípio da Relatividade. No entanto, a evolução da Física teórica demonstrou que este caminho era impraticável.
As inovadoras investigações teóricas de H. A. Lorentz sobre os processos eletrodinâmicos e ópticos em corpos móveis demonstraram que as experiências nestes campos conduzem com necessidade imperiosa a uma teoria dos processos eletromagnéticos que tem como conseqüência irrefutável a lei da constância da luz no vácuo. Por isso, os teóricos de vanguarda se inclinaram mais por prescindir do Princípio da Relatividade, pese a não poder achar nem um só fato experimental que o contradissesse. Aqui é onde entrou a Teoria da Relatividade. Mediante uma análise dos conceitos de espaço e tempo se viu que em realidade não existia nenhuma incompatibilidade entre o Princípio da Relatividade e a lei de propagação da luz, senão que, atendo-se sistematicamente a estas duas leis, chegava-se a uma teoria logicamente impecável.
Esta teoria, que para diferenciá-la de sua ampliação (comentada mais adiante) chamamos Teoria da Relatividade Especial, é a que exporemos a seguir em suas idéias fundamentais.

8. SOBRE O CONCEITO DE TEMPO NA FÍSICA

Um raio caiu em dois lugares muito distantes ***A*** e ***B*** da via. Eu adiciono a afirmação de que ambos impactos ocorreram simultaneamente. Se agora pergunto, querido leitor, se esta afirmação tem ou não sentido, me contestarás com um sim contundente. Mas se depois o importuno com o rogo de que me expliques com mais precisão esse sentido, advertirás depois de certa reflexão que a resposta não é tão singela como parece a primeira vista. Ao cabo de algum tempo quiçá vá à sua mente a seguinte resposta: O significado da afirmação é claro de per si e não precisa de nenhuma aclaração; no entanto, teria que reflexionar um pouco se se me exige determinar, mediante observações, se num caso particular os dois eventos são ou não simultâneos. Mas com esta resposta não posso dar-me por satisfeito, pela seguinte razão: supondo que um experiente meteorologista tivesse achado, mediante agudíssimos raciocínios, que o raio tem que cair sempre simultaneamente nos lugares A e B, se proporia o problema de comprovar se esse resultado teórico corresponde ou não com a realidade. Algo análogo ocorre em todas as proposições físicas nas que intervém o conceito de simultâneo. Para o físico não existe o conceito enquanto não se brinde a possibilidade de averiguar num caso particular se é verdadeiro ou não. Faz falta, por tanto, uma definição de simultaneidade que proporcione o método para decidir experimentalmente no caso presente se os dois raios caíram simultaneamente ou não. Enquanto não se cumpra este requisito, estarei entregando como físico (e também como não físico!) à ilusão de crer que posso dar sentido a essa afirmação da simultaneidade. (Não sigas lendo, querido leitor, até conceder-me isto plenamente convicto.)
Depois de algum tempo de reflexão fazes a seguinte proposta para constatar a simultaneidade. Mede-se o segmento de união ***AB*** ao longo da via e se coloca em seu ponto médio ***M*** a um observador munido de um dispositivo (dois espelhos formando 90° entre si, por exemplo) que lhe permite a visualização óptica simultânea de ambos lugares ***A*** e ***B***. Se o observador percebe os dois raios simultaneamente, então é que são simultâneos. Ainda que a proposta me satisfaz muito, sigo pensando que a questão não fica aclarada do todo, pois me sinto obrigado a fazer a seguinte objeção: Tua definição seria necessariamente correta se eu soubesse já que a luz que a percepção dos raios transmite ao observador em ***M*** se propaga com a mesma velocidade no segmento ***A*** → ***M*** que no segmento ***B*** → ***M***. No entanto, a comprovação desta suposição só seria possível se dispusesse já dos meios para a medição dos tempos. Parece, pois, que nos movemos num círculo lógico.
Depois de refletir outra vez, lanças, com toda razão, um olhar algo depreciativo e me dizes: Apesar de tudo, mantenho minha definição anterior, porque em realidade não pressupõe nada sobre a luz. À definição de simultaneidade somente há que lhe impor uma condição, e é que em qualquer caso real permita tomar uma decisão empírica a respeito da pertinência ou não pertinência do conceito a definir. Que minha definição cobre este objetivo é inegável. Que a luz demora o mesmo tempo em percorrer o caminho que o não é em realidade nenhuma suposição prévia nem hipótese sobre a natureza física da luz, senão uma estipulação que

posso fazer a discrição para chegar a uma definição de simultaneidade. Está claro que esta definição se pode utilizar para dar sentido exato ao enunciado de simultaneidade, não só de dois eventos, senão de um número arbitrário deles, seja qual for sua posição com respeito ao corpo de referência[6] . Com isso se chega também a uma definição do tempo na Física. Imaginemos, efetivamente, que nos pontos ***A***,***B***,***C*** da via (sistema de coordenadas) existem relógios de idêntica constituição e dispostos de tal maneira que as posições dos ponteiros sejam simultaneamente (no sentido anterior) as mesmas.

Entende-se então por tempo de um acontecimento a hora (posição dos ponteiros) marcada por aquele nesses relógios que está imediatamente contíguo (espacialmente) ao acontecimento. Deste modo se atribui a cada acontecimento um valor temporário que é essencialmente observável. Esta definição entranha outra hipótese física de cuja validade, em ausência de razões empíricas na contramão, não se poderá duvidar.

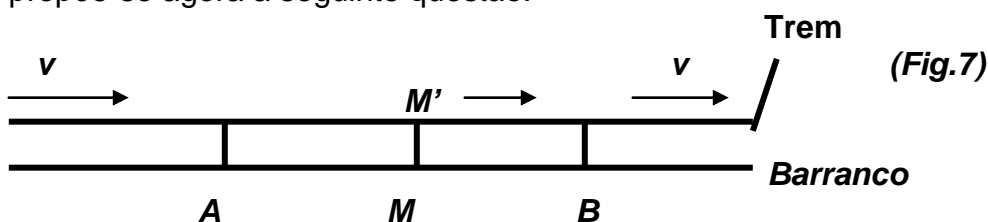
Efetivamente, supõe-se que todos os relógios marcham com igual velocidade se têm a mesma constituição. Formulando-o exatamente: se dois relógios colocados em repouso em diferentes lugares do corpo de referência são postos em hora de tal maneira que a posição dos ponteiros de um seja simultânea (no sentido anterior) à mesma posição dos ponteiros do outro, então posições iguais dos ponteiros são em geral simultâneas (no sentido da definição anterior).

6

Supomos ademais que quando ocorrem três fenômenos ***A***, ***B***. ***C*** em lugares diferentes e ***A*** é simultâneo a ***B*** e ***B*** simultâneo a ***C*** (no sentido da definição anterior), então se cumpre também o critério de simultaneidade para o casal de acontecimentos ***A-C***. Esta suposição é uma hipótese física sobre a lei de propagação da luz; tem que se cumprir necessariamente para poder manter em pé a lei da constância da velocidade da luz no vácuo.

9. A RELATIVIDADE DA SIMULTANEIDADE

Até agora referimos nossos raciocínios a um determinado corpo de referência que chamamos barranco ou vias. Suponhamos que pelos trilhos viaja um trem muito longo, com velocidade constante ***v*** e na direção assinalada na Fig. 7. As pessoas que viajam neste trem acharão vantajoso utilizar o trem como corpo de referência rígido (sistema de coordenadas) e referirão todos os eventos ao trem. Todo acontecimento que se produz ao longo da via, produz-se também num ponto determinado do trem. Inclusive a definição de simultaneidade se pode dar exatamente igual com respeito ao trem que com respeito às vias. No entanto, propõe-se agora a seguinte questão:

(Fig.7)

Dois eventos (p. ex., os dois raios ***A*** e ***B***) que são simultâneos com respeito ao barranco, são também simultâneos com respeito ao trem? Em seguida demonstraremos que a resposta tem que ser negativa.
Quando dizemos que os raios ***A*** e ***B*** são simultâneos com respeito às vias, queremos dizer: os raios de luz que saem dos lugares ***A*** e ***B*** se reúnem no ponto médio ***M*** do trecho da via ***A-B***. Agora , os eventos ***A*** e ***B*** se correspondem também com lugares ***A*** e ***B*** no trem. Seja ***M'*** o ponto médio do segmento ***A-B*** do trem em marcha. Este ponto ***M'*** é verdadeiro que no instante da queda dos raios[7] coincide com o ponto ***M***, mas, como se indica na figura, move-se para a direita com a velocidade ***v*** do trem. Um observador que estivesse sentado no trem em ***M'***, mas que não possuísse esta velocidade, permaneceria constantemente em ***M***, e os raios de luz que partem das faíscas ***A*** e ***B*** o atingiriam simultaneamente, isto é, estes dois raios de luz se reuniriam precisamente nele. A realidade é, no entanto, que (julgando a situação desde o barranco) este observador vai ao encontro do raio de luz que vem de ***B***, fugindo em mudança do que avança desde **A** Portanto, verá antes a luz que sai de ***B*** que a que sai de ***A***. Em resumidas contas, os observadores que utilizam o trem como corpo de referência têm que chegar à conclusão de que a faísca elétrica ***B*** caiu antes que a ***A***. Chegamos assim a um resultado importante: eventos que são simultâneos com respeito ao barranco não o são com respeito ao trem, e vice-versa (Relatividade da simultaneidade). Cada corpo de referência (sistema de coordenadas) tem seu tempo especial; uma localização temporária tem só sentido quando se indica o corpo de referência ao que remete. Antes da Teoria da Relatividade, a Física supunha sempre implicitamente que o significado dos dados temporais era absoluto, isto é, independente do estado de movimento do corpo de referência. Mas acabamos de ver que esta suposição é incompatível com a definição natural

[7] Do ponto de vista do barranco!

de simultaneidade; se prescindimos dele, desaparece o conflito, exposto na seção 7, entre a lei da propagação da luz e o Princípio da Relatividade.
Efetivamente, o conflito provém do raciocínio da seção 6, que agora resulta insustentável. Inferimos ali que o homem que caminha pelo vagão e percorre o trecho ***w*** num segundo, percorre esse mesmo trecho também num segundo com respeito às vias. Agora , toda vez que, em virtude das reflexões 'anteriores, o tempo que precisa um processo com respeito ao vagão não cabe igualá-lo à duração do mesmo processo avaliada desde o corpo de referência do barranco, também não se pode afirmar que o homem, ao caminhar com respeito às vias, percorra o trecho ***w*** num tempo que — mensurado desde o barranco — é igual a um segundo. Digamos de passagem que o raciocínio da seção 6 descansa além do mais numa segunda suposição que, à luz de uma reflexão rigorosa, revela-se arbitrária, a qual não tira para que, antes de estabelecer-se a Teoria da Relatividade, fosse aceita sempre (de modo implícito).

10. SOBRE A RELATIVIDADE DO CONCEITO DE DISTÂNCIA ESPACIAL

Observamos dois lugares particulares do trem[8] que viaja com velocidade ***v*** pela linha e nos perguntamos que distância há entre eles. Sabemos já que para medir uma distância se precisa um corpo de referência com respeito ao qual fazê-lo. O mais singelo é utilizar o próprio trem como corpo de referência (sistema de coordenadas). Um observador que viaja no trem mede a distância, transportando em linha reta uma régua sobre o solo dos vagões, por exemplo, até chegar desde um dos pontos marcados ao outro. O número que indica quantas vezes transportou a régua é então a distância procurada. Outra coisa é se se quer medir a distância desde a via. Aqui se oferece o método seguinte: sejam ***A'*** e ***B'*** os dois pontos do trem de cuja distância se trata; estes dois pontos se movem com velocidade ***v*** ao longo da via. Perguntemo-nos primeiro pelos pontos ***A*** e ***B*** da via por onde passam ***A'*** e ***B'*** num momento determinado ***t*** (mensurado desde a via). Em virtude da definição de tempo dada na seção 8, estes pontos ***A*** e ***B*** da via são determináveis. A seguir se mede a distância entre ***A*** e ***B*** transportando repetidamente o metro ao longo da via. A priori não está dito que esta segunda medição tenha que proporcionar o mesmo resultado que a primeira. O comprimento do trem, medido da via, pode ser diferente que medido desde o próprio trem. Esta circunstância se traduz numa segunda objeção que se opõe ao raciocínio, aparentemente tão meridiano, da seção 6. Pois se o homem no vagão percorre numa unidade de tempo o trecho ***w*** medido desde o trem este trecho, medido desde a via, não tem por que ser igual a ***w***.

[8] O centro dos vagões primeiro e centésimo, por exemplo.

11. A TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

As considerações feitas nos três últimas seções nos mostram que a aparente incompatibilidade da lei de propagação da luz com o Princípio de Relatividade na seção 7 está deduzida através de um raciocínio que tomava de empréstimo da Mecânica Clássica duas hipóteses injustificadas; estas hipóteses são:

1. O intervalo temporal entre dois eventos é independente do estado de movimento do corpo de referência.
2. O intervalo espacial entre dois pontos de um corpo rígido é independente do estado de movimento do corpo de referência.

Se eliminamos estas duas hipóteses, desaparece o dilema da seção 7, porque o teorema de adição de velocidades deduzido na seção 6 perde sua validade. Ante nós surge a possibilidade de que a lei da propagação da luz no vácuo seja compatível com o Princípio de Relatividade. Chegamos assim à pergunta: como modificar o raciocínio da seção 6 para eliminar a aparente contradição entre estes dois resultados fundamentais da experiência? Esta questão conduz a outra de índole geral. No raciocínio da seção 6 aparecem lugares e tempos com relação ao trem e com relação às vias. Como se acham o lugar e o tempo de um acontecimento com relação ao trem quando se conhecem o lugar e o tempo do acontecimento com respeito às vias? Esta pergunta tem alguma resposta de acordo com a qual a lei da propagação no vácuo não contradiga ao Princípio de Relatividade?

Ou expresso de outro modo: cabe achar alguma relação entre as posições e tempos dos diferentes eventos com relação a ambos corpos de referência, de maneira que todo raio de luz tenha a velocidade de propagação ***c*** com respeito às vias e com respeito ao trem? Esta pergunta conduz a uma resposta muito determinada e afirmativa, a uma lei de transformação muito precisa para as magnitudes espaço-temporais de um acontecimento ao passar de um corpo de referência a outro.

Antes de entrar em isso, intercalemos a seguinte consideração. Até agora somente falamos de eventos que se produziam ao longo da via, a qual desempenhava a função matemática de uma reta. Mas, seguindo o indicado na seção 2, cabe imaginar que este corpo de referência se prolonga para os lados e para acima por meio de um andaime de varetas, de maneira que qualquer acontecimento, ocorra onde ocorra, pode localizar-se com respeito a esse andaime. Analogamente, é possível imaginar que o trem que viaja com velocidade ***v*** se prolonga por todo o espaço, de maneira que qualquer acontecimento, por longínquo que esteja, também possa localizar-se com respeito ao segundo andaime. Sem incorrer em defeito teórico, podemos prescindir do fato de que em realidade esses andaimes se destroçariam um contra o outro devido à impenetrabilidade dos corpos sólidos. Em cada um destes andaimes imaginamos que se erigem três paredes mutuamente perpendiculares que denominamos planos coordenados (sistema de coordenadas). Ao barranco lhe corresponde então um sistema de coordenadas ***K***, e ao trem outro ***K'***. Qualquer acontecimento, onde quer que ocorra, vem fixado espacialmente com respeito a **K** pelas três perpendiculares ***x***, e, ***z*** aos planos coordenados, e temporariamente por um valor

t. Esse mesmo acontecimento vem fixado no espaço-tempo com respeito a ***K'*** por valores correspondentes ***x'***, **y'**, ***z'***, ***t'***, que, como é natural, não coincidem com ***x***, ***y***, ***z***, ***t***. Já explicamos antes com detalhe como interpretar estas magnitudes como resultados de medições físicas. É evidente que o problema que temos proposto se pode formular exatamente da maneira seguinte: dadas as quantidades ***x***, ***y***, ***z***, ***t*** de um acontecimento com respeito a ***K***, quais são os valorizes ***x'***,***y'***,***z'***,***t'*** do mesmo acontecimento com respeito a ***K'*** ? As relações há que as eleger de tal modo que satisfaçam a lei de propagação da luz no vácuo para um e o mesmo raio de luz (e além do mais para qualquer raio de luz) com respeito a ***K*** e ***K'***. Para a orientação espacial relativa indicada no desenho da figura 2, o problema fica resolvido pelas equações:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Este sistema de equações se designa com o nome de transformação de Lorentz[9].

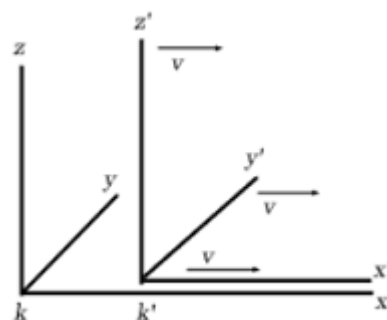



fig. 8

Agora , se em lugar da lei de propagação da luz tivéssemos tomado como base os supostos implícitos na velha Mecânica, relativos ao caráter absoluto dos tempos e as comprimento, em vez das anteriores equações de transformação teríamos obtido estas outras:

[9] No Apêndice se dá uma derivação singela da transformação de Lorentz

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t,$$

sistema que com freqüência se denomina transformação de Galileu. A transformação de Galileu se obtém da de Lorentz igualando nesta a velocidade da luz ***c*** a um valor infinitamente grande. O seguinte exemplo mostra claramente que, segundo a transformação de Lorentz, a lei de propagação da luz no esvaziamento se cumpre tanto com respeito ao corpo de referência ***K*** como com respeito ao corpo de referência ***K'.*** Suponhamos que se envia um sinal luminoso ao longo do eixo ***x*** positivo, propagando-se a excitação luminosa segundo a equação

$$x = ct,$$

isto é, com velocidade ***c***. De acordo com as equações da transformação de Lorentz, esta singela relação entre ***x*** e ***t*** determina uma relação entre ***x'*** e ***t'***. Efetivamente, substituindo ***x*** pelo valor ***ct*** nas equações primeira e quarta da transformação de Lorentz obtemos:

$$x' = \frac{(c - v)t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

de onde, por divisão, resulta imediatamente: ***x' = ct'.***

A propagação da luz, referida ao sistema ***K'***, produz-se segundo esta equação. Comprova-se, por tanto, que a velocidade de propagação é também igual a ***c*** com respeito ao corpo de referência ***K'***; e analogamente para raios de luz que se propaguem em qualquer outra direção. O qual, naturalmente, não é de estranhar, porque as equações da transformação de Lorentz estão derivadas com este critério.

12. O COMPORTAMENTO DE HASTES E RELÓGIOS MÓVEIS

Coloco uma haste de um metro sobre o eixo ***x'*** de ***K'***, de maneira que um extremo coincida com o ponto ***x'*** = **0** e o outro com o ponto ***x'*** = ***1***. Qual é a comprimento da haste com respeito ao sistema ***K***? Para averiguá-lo podemos determinar as posições de ambos extremos com respeito a ***K*** num momento determinado ***t***. Da primeira equação da transformação de Lorentz, para ***t*** = **0**, obtém-se para estes dois pontos:

$$X_{(\text{origem da escala})} = 0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$X_{(\text{extremo da escala})} = 1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

estes dois pontos distam entre si → $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Agora , o metro se move com respeito a ***K*** com a velocidade ***v***, de onde se deduz que a comprimento de uma haste rígida de um metro que se move com velocidade ***v*** no sentido de sua comprimento é de

$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ metros. A haste rígida em movimento é mais curta do que a mesma haste quando está em estado de repouso, e é tanto mais curta quando mais rapidamente se mova. Para a velocidade ***v = c*** seria

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0$$

para velocidades ainda maiores a raiz se faria imaginária. De aqui inferimos que na Teoria da Relatividade a velocidade ***c*** desempenha o papel de uma velocidade limite que não pode atingir nem ultrapassar nenhum corpo real. Adicionemos que este papel da velocidade ***c*** como velocidade limite se segue das próprias equações da transformação de Lorentz, porque estas perdem todo sentido quando ***v*** se elege maior do que ***c***.
Se tivéssemos procedido ao inverso, considerando um metro que se acha em repouso com respeito a ***K*** sobre o eixo ***x***, teríamos comprovado que em relação a ***K***' tem a comprimento de

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

o qual está totalmente de acordo com o Princípio da Relatividade, no qual baseamos nossas considerações. A priori é evidente que as equações de transformação têm algo que dizer sobre o comportamento físico de hastes e relógios, porque as quantidades ***x***, ***y, z, t*** não são outra coisa que resultados de

medidas obtidas com relógios e hastes. Se tivéssemos tomado como base a transformação de Galileu, não teríamos obtido um encurtamento de comprimento como conseqüência do movimento. Imaginemos agora um relógio com ponteiros de segundos que repousa constantemente na origem (***x' = 0***) de ***K'***. Sejam ***t' = 0*** e ***t' = 1*** dois sinais sucessivos deste relógio. Para estes dois ticks, as equações primeira e quarta da transformação de Lorentz darão:

t = 0 e

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Mensurado desde ***K***, o relógio se move com a velocidade ***v***; com respeito a este corpo de referência, entre dois de seus sinais decorre, não um segundo, senão

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ segundos, ou seja um tempo algo maior. Como conseqüência de seu movimento, o relógio marcha algo mais devagar do que em estado de repouso. A velocidade da luz ***c*** desempenha, também aqui, o papel de uma velocidade limite inatingível.

13. TEOREMA DE ADIÇÃO DE VELOCIDADES. EXPERIMENTO DE FIZEAU

Dado que as velocidades com que na prática podemos mover relógios e hastes são pequenas frente a velocidade da luz ***c***, é difícil que possamos comparar os resultados do titulo anterior com a realidade. Isto posto, por outro lado, esses resultados aparecem ao leitor cheio de singulares, vou extrair da teoria outra conseqüência que é muito fácil de deduzir do anteriormente exposto e que os experimentos confirmam brilhantemente.
Na seção 6 havíamos deduzido o teorema de adição para velocidades de mesma direção, tal e como resulta das hipóteses da Mecânica Clássica. O mesmo se pode deduzir facilmente da transformação de Galileu (seção11). Em lugar do homem que caminha pelo vagão introduzimos um ponto que se move com respeito ao sistema de coordenadas ***K'*** segundo a equação:

$$x' = wt'.$$

Mediante as equações primeira e quarta da transformação de Galileu podemos expressar **x'** e **t'** em função de ***x*** e ***t***, obtendo:

$$x = (v + w)\, t.$$

Esta equação não expressa outra coisa que a lei do movimento do ponto com respeito ao sistema ***K*** (do homem com respeito ao barranco), velocidade que designamos por ***W***, com a qual se obtém, como na seção 6:

$$W = v + w \quad (A)$$

Mas este raciocínio o podemos efetuar igualmente baseando-nos na Teoria da Relatividade. O que há que fazer então é expressar ***x'*** e ***t'*** na equação

$$x' = wt'$$

em função de ***x*** e ***t***, utilizando as equações primeira e quarta da transformação de Lorentz. Em lugar da equação ***(A)*** obtém-se então esta outra:

$$W = \frac{v+w}{1 + \frac{vw}{c^2}} \quad (B)$$

que corresponde ao teorema de adição de velocidades de igual direção segundo a Teoria da Relatividade. A questão é qual destes dois teoremas resiste a aferição com a experiência. Sobre o particular nos induz a um experimento extremamente importante, realizado faz mais de meio século pelo genial físico Fizeau e desde

então repetido por alguns dos melhores físicos experimentais, pelo qual o resultado é irrepreensível. O experimento versa sobre a seguinte questão. Suponhamos que a luz se propaga num verdadeiro líquido em repouso com uma determinada velocidade ***w***. Com que velocidade se propaga no tubo ***R*** da figura 9

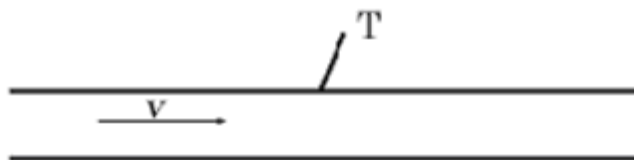



Fig. 9

na direção da flecha, quando dentro desse tubo flui o líquido com velocidade ***v***? Em qualquer caso, fiéis ao Princípio de Relatividade, teremos que aceitar a suposição de que, com respeito ao líquido, a propagação da luz se produz sempre com a mesma velocidade ***w***, mova-se ou não o líquido com respeito a outros corpos. São conhecidas, por tanto, a velocidade da luz com respeito ao líquido e a velocidade deste com respeito ao tubo, e se procura a velocidade da luz com respeito ao tubo. Está claro que o problema volta a ser o mesmo que o da seção 6. O tubo desempenha o papel das vias ou do sistema de coordenadas ***K***; o líquido, o papel do vagão ou do sistema de coordenadas ***K'***; a luz, o do homem que caminha pelo vagão ou o do ponto móvel mencionado neste. Por conseguinte, se chamamos ***W*** à velocidade da luz com respeito ao tubo, esta virá dada pela equação ***(A)*** ou pela ***(B)***, segundo que seja a transformação de Galileu ou a de Lorentz a que se corresponde com a realidade.
O experimento[10] falha a favor da equação ***(B)*** deduzida da Teoria da Relatividade, e além do mais com grande exatidão. Segundo as últimas e excelentes medições de Zeeman, a influência da velocidade da corrente ***v*** sobre a propagação da luz vem representada pela fórmula ***(B)*** com uma exatidão superior ao 1 por 100. Há que destacar, no entanto, que H. A. Lorentz, muito antes de estabelecer-se a Teoria da Relatividade, deu já uma teoria deste fenômeno por via puramente eletrodinâmica e utilizando determinadas hipóteses sobre a estrutura eletromagnética da matéria. Mas esta circunstância não diminui nada o poder probatório do experimento, enquanto "*experimentum crucis*" a favor da Teoria da Relatividade. Pois a Eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz, sobre a qual descansava a teoria original, não está em nada em contradição com a Teoria da Relatividade. Esta última emanou melhor da Eletrodinâmica como resumo e generalização assombrosamente singelos das hipóteses, antes mutuamente independentes, que serviam de fundamento à Eletrodinâmica.

[10] Fizeau achou W = w + v (1- 1/n2) , onde n = c/w é o índice de refração do líquido. Por outro lado, devido a que vw/c2 é muito pequeno frente a 1, pode-se substituir (B) por W = (w+v) (1- vw/2), ou bem, com a mesma aproximação, w+v (1- 1/n2), o qual concorda com o resultado de Fizeau.

14. O VALOR HEURÍSTICO DA TEORIA DA RELATIVIDADE

A corrente de idéias que expusemos até aqui pode se resumir brevemente como segue. A experiência levou à convicção de que, por um lado, o Princípio da Relatividade (em sentido restrito) é válido, e por outro, que a velocidade de propagação da luz no vácuo comporta-se como uma constante ***c***. Unindo estes dois postulados resultou a lei de transformação para as coordenadas retangulares **x**, **y**, **z** e o tempo **t** dos eventos que compõem os fenômenos naturais, obtendo-se, não a transformação de Galileu, senão (em discrepância com a Mecânica clássica) a transformação de Lorentz.
Neste raciocínio desempenhou um papel importante a lei de propagação da luz cuja aceitação vem justificada por nosso conhecimento atual. Agora ,uma vez em posse da transformação de Lorentz, podemos unir esta com o princípio de Relatividade e resumir a teoria no enunciado seguinte:Toda lei geral da natureza tem que estar constituída de tal modo que se transforme em outra lei de idêntica estrutura ao introduzir, em lugar das variáveis espaço-temporais ***x***, **y**, **z**, **t** do sistema de coordenadas original **K**, novas variáveis espaço-temporais **x'**, **y**', **z**', **t**' de outro sistema de coordenadas **K'**, onde a relação matemática entre as quantidades com prima e sem prima vem dada pela transformação de Lorentz. Formulado brevemente: as leis gerais da natureza são covariantes com respeito à transformação de Lorentz.
Esta é uma condição matemática muito determinada que a Teoria da Relatividade prescreve às leis naturais, com o qual se converte em valioso auxiliar heurístico na busca de leis gerais da natureza. Se se encontrasse uma lei geral da natureza que não cumprisse essa condição, ficaria refutado pelo menos um dos dois supostos fundamentais da teoria. Vejamos agora o que esta última mostrou quanto a resultados gerais.

15. RESULTADOS GERAIS DA TEORIA

Das considerações anteriores a Teoria da Relatividade (Especial) nasceu da Eletrodinâmica e da Ótica. Nestes campos não modificou muito os enunciados da teoria, mas simplificou notavelmente o edifício teórico, isto é, a derivação das leis, e, o que é incomparavelmente mais importante, reduziu muito o número de hipóteses independentes sobre as que descansa a teoria. À teoria de Maxwell-Lorentz lhe conferiu um grau tal de evidência que aquela se teria imposto com caráter geral entre os físicos ainda que os experimentos tivessem falado menos convincentemente a seu favor. A Mecânica clássica precisava de uma modificação antes de poder harmonizar com o requisito da Teoria da Relatividade especial. Mas esta modificação afeta unicamente, em essência, às leis para movimentos rápidos nos que as velocidades **v** da matéria não sejam demasiado pequenas frente à da luz. Movimentos tão rápidos só nos mostra a experiência em elétrons e íons; em outros movimentos as discrepâncias com respeito às leis da Mecânica clássica são demasiado pequenas para ser detectáveis na prática.
Do movimento dos astros não falaremos até chegar à Teoria da Relatividade Geral. Segundo a Teoria da Relatividade a energia cinética de um ponto material de massa **m** não vem dado pela conhecida expressão senão pela expressão.

$$m \frac{v^2}{2},$$

senão pela expressão

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Esta expressão tende ao infinito quando a velocidade ***v*** se aproxima à velocidade da luz ***c***. Por conseguinte, por maior que seja a energia investida na aceleração, a velocidade tem que permanecer sempre inferior a ***c***. Se se desenvolve em série a expressão da energia cinética, obtém-se:

$$mc^2 + m\frac{v^2}{2} + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \ldots..$$

O terceiro termo é sempre pequeno frente ao segundo (o único considerado na Mecânica Clássica) quando $\frac{v^2}{c^2}$ este termo é pequeno em relação a 1.

O primeiro termo mc^2 não depende da velocidade, pelo qual não entra em consideração ao tratar o problema de como a energia de um ponto material depende da velocidade. Sobre sua importância teórica falaremos mais adiante. O resultado mais importante de índole geral ao que conduziu a Teoria da

Relatividade Especial concerne ao conceito de massa. A Física pré-relativista conhece dois princípios de conservação de importância fundamental, o da conservação da energia e o da conservação da massa; estes dois princípios fundamentais aparecem completamente independentes uno de outro. A Teoria da Relatividade os funde num só. A seguir explicaremos brevemente como se chegou até aí e como se interpretar esta fusão. O Princípio de Relatividade exige que o postulado de conservação da energia se cumpra, não só com respeito a um sistema de coordenadas **K**, senão com respeito a qualquer sistema de coordenadas **K'** que se encontre com relação a **K** em movimento de translação uniforme (afirmado brevemente, com respeito a qualquer sistema de coordenadas de Galileu). Em contraposição à Mecânica Clássica, o passo entre dois desses sistemas vem regido pela transformação de Lorentz.

A partir destas premissas, e em conjunção com as equações fundamentais da eletrodinâmica maxwelliana, pode-se inferir rigorosamente, mediante considerações relativamente singelas, que: um corpo que se move com velocidade v e que absorve a energia E_0 em forma de radiação[11] sem variar por isso sua velocidade, experimenta um aumento de energia na quantidade:

$$\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Tendo em conta a expressão que demos antes para a energia cinética, a energia do corpo virá dada por :

$$\frac{\left(m+\frac{E_0}{c^2}\right)c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

O corpo tem então a mesma energia que outro de velocidade v e massa

$$\left(m+\frac{E_0}{c^2}\right)$$

Cabe portanto dizer: se um corpo[12] absorve a energia E_0, sua massa inercial cresce em

$$\frac{E_0}{c^2}$$

A massa inercial de um corpo não é uma constante, ao contrário, variável segundo a modificação de sua energia. A massa inercial de um sistema de corpos cabe contemplá-la precisamente como uma medida de sua energia. O postulado da conservação da massa de um sistema coincide com o da conservação da energia

[11] Eo é a energia absorvida com respeito a um sistema de coordenadas que se move com o corpo.
[12] Com respeito a um sistema de coordenadas solidário com o corpo.

e só é válido na medida em que o sistema não absorve nem emite energia. Se escrevemos a expressão da energia na forma

$$\frac{mc^2 + E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

se vê que o termo mc^2, que já nos chamou atenção anteriormente, não é outra coisa que a energia que possuía o corpo antes de absorver a energia E_0. A aferição direta deste postulado com a experiência fica por enquanto excluído, porque as variações de energia E_0 que podemos comunicar a um sistema não são suficientemente grandes para fazer-se notar em forma de uma alteração da massa inercial do sistema.

$$\frac{E_0}{C^2}$$

é demasiado pequeno em comparação com a massa m que existia antes da variação de energia.

A esta circunstância se deve o que se pudesse estabelecer com sucesso um princípio de conservação da massa de validade independente. Uma última observação de natureza teórica. O sucesso da interpretação de Faraday-Maxwell da ação eletrodinâmica a distância através de processos intermediários com velocidade de propagação finita criou entre os físicos mais arraigados a convicção de que não existiam ações a distância instantâneas e imediatas do tipo da lei de gravitação de Newton. Segundo a Teoria da Relatividade, no lugar da ação instantânea a distância, ou ação a distância com velocidade de propagação infinita, aparece sempre a ação a distância com a velocidade da luz, a qual tem que ver com o papel teórico que desempenha a velocidade c nesta teoria. Na segunda parte se mostrará como se modifica este resultado na Teoria da Relatividade Geral.

16. A TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL E A EXPERIÊNCIA

A pergunta de até que ponto se vê apoiada a Teoria da Relatividade Especial pela experiência não é fácil de responder, por um motivo que já mencionamos ao falar do experimento fundamental de Fizeau. A Teoria da Relatividade Especial cristalizou a partir da Teoria de Maxwell-Lorentz dos fenômenos eletromagnéticos, pelo qual todos os fatos experimentais que apóiam essa Teoria Eletromagnética apóiam também a Teoria da Relatividade. Mencionarei aqui, por ser de especial importância, que a Teoria da Relatividade permite derivar, de maneira extremamente simples e em consonância com a experiência, aquelas influências que experimenta a luz das estrelas fixas devido ao movimento relativo da Terra com respeito a elas.

Trata-se do deslocamento anual da posição aparente das estrelas fixas como conseqüência do movimento terrestre arredor do Sol (aberração) e o influxo que exerce a componente radial dos movimentos relativos das estrelas fixas com respeito à Terra sobre a cor da luz que chega até nós; este influxo se manifesta num pequeno deslocamento das riscas espectrais da luz que nos chega desde uma estrela fixa, com respeito à posição espectral das mesmas riscas espectrais obtidas com uma fonte luminosa terrestre (princípio de Doppler). Os argumentos experimentais a favor da Teoria de Maxwell-Lorentz, que ao mesmo tempo são argumentos a favor da Teoria da Relatividade, são demasiado copiosos como para expô-los aqui. De fato, restringem a tal ponto as possibilidades teóricas, que nenhuma outra teoria diferente da de Maxwell-Lorentz se pôde impor frente à experiência. No entanto, há duas classes de fatos experimentais constatados até agora que a Teoria de Maxwell-Lorentz só pode acomodar a base de recorrer a uma hipótese auxiliar que de seu — isto é, sem utilizar a Teoria da Relatividade — parece estranha. É sabido que os raios catódicos e os assim chamados raios emitidos por substâncias radiativas constam de corpúsculos elétricos negativos (elétrons) de pequeníssima inércia e grande velocidade. Pesquisando o deslocamento destas radiações sob a influência de campos elétricos e magnéticos se pode estudar muito exatamente a lei do movimento destes corpúsculos.

No tratamento teórico destes elétrons há que lutar com a dificuldade de que a Eletrodinâmica por si só não é capaz de explicar sua natureza. Pois dado que as massas elétricas de igual sinal se repelem, as massas elétricas negativas que constituem o elétron deveriam separar-se umas de outras sob a influência de sua interação se não fosse pela ação de outras forças cuja natureza nos resulta ainda obscura[13]. Se supomos agora que as distâncias relativas das massas elétricas que constituem o elétron permanecem constantes ao mover-se este (união rígida no sentido da Mecânica Clássica), chegamos a uma lei do movimento do elétron que não concorda com a experiência. H. A. Lorentz, guiado por considerações puramente formais, foi o primeiro em introduzir a hipótese de que o corpo do elétron experimenta, em virtude do movimento, uma contração proporcional à expressão

[13] A teoria da relatividade geral propõe a idéia de que as massas elétricas de um elétron se mantêm unidas por forças gravitacionais.

$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ na direção do movimento

Esta hipótese, que eletrodinâmicamente não se justifica de modo algum, proporciona essa lei do movimento que se viu confirmada com grande precisão pela experiência nos últimos anos. A Teoria da Relatividade fornece a mesma lei do movimento sem necessidade de propor hipóteses especiais sobre a estrutura e o comportamento do elétron. Algo análogo ocorria, como vimos na seção 13, com o experimento de Fizeau, cujo resultado o explicava a Teoria da Relatividade sem ter que fazer hipótese sobre a natureza física do fluido.
A segunda classe de fatos que assinalamos se refere à questão de se o movimento terrestre no espaço se pode detectar ou não em experimentos efetuados na Terra. Já indicamos na seção 5 que todas as tentativas realizadas neste sentido deram resultado negativo. Com anterioridade à Teoria Relativista, a ciência não podia explicar facilmente este resultado negativo, pois a situação era a seguinte. Os velhos preconceitos sobre o espaço e o tempo não permitiam nenhuma dúvida a respeito de que a transformação de Galileu era a que regia o passo de um corpo de referência a outro. Supondo então que as equações de Maxwell-Lorentz sejam válidas para um corpo de referência **K**, resulta que não valem para outro corpo de referência **K'** que se mova uniformemente com respeito a **K** se se aceita que entre as coordenadas de **K** e **K'** regem as relações da transformação de Galileu. Isto parece indicar que de entre todos os sistemas de coordenadas de Galileu se destaca fisicamente um (**K**) que possui um determinado estado de movimento. Fisicamente se interpretava este resultado dizendo que **K** está em repouso com respeito a um hipotético éter luminífero, enquanto todos os sistemas de coordenadas **K'** em movimento com respeito a **K** estariam também em movimento com respeito ao éter. A este movimento de **K'** com respeito ao éter (vento do éter em relação a **K'**) se lhe atribuíam as complicadas leis que pretensamente valiam com respeito a **K'**. Para ser conseqüentes, tinha que postular também um vento do éter semelhante com relação à Terra, e os físicos puseram durante muito tempo todo seu empenho em provar sua existência. Michelson achou com este propósito um caminho que parecia infalível. Imaginemos dois espelhos montados sobre um corpo rígido, com as faces refletivas olhando-se de frente. Se todo este sistema se acha em repouso com respeito ao éter luminífero, qualquer raio de luz precisa um tempo muito determinado **T** para ir de um espelho ao outro e voltar. Pelo contrário, o tempo (calculado) para esse processo é algo diferente (**T'**)quando o corpo, junto com os espelhos, move-se com respeito ao éter. É mais! Os cálculos predizem que, para uma determinada velocidade ***v*** com respeito ao éter, esse tempo **T'** é diferente quando o corpo se move perpendicularmente ao plano dos espelhos que quando o faz paralelamente. Ainda sendo minúscula a diferença calculada entre estes dois intervalos temporários, Michelson e Morley realizaram um experimento de interferências no que essa discrepância teria que se ter posto claramente de manifesto. O resultado do experimento foi, não obstante, negativo, para grande desconcerto dos físicos. Lorentz e Fitzgerald sacaram à teoria deste desconcerto,

supondo que o movimento do corpo com respeito ao éter determinava uma contração daquele na direção do movimento e que dita contração compensava justamente essa diferença de tempos. A comparação com as considerações da seção12 demonstra que esta solução era também a correta desde o ponto de vista da Teoria da Relatividade. Mas a interpretação da situação segundo esta última é incomparavelmente mais satisfatória. De acordo com ela, não existe nenhum sistema de coordenadas privilegiado que dê pé a introduzir a idéia do éter, nem também não nenhum vento do éter nem experimento algum que o ponha de manifesto. A contração dos corpos em movimento se segue aqui, sem hipóteses especiais, dos dois princípios básicos da teoria; e o decisivo para esta contração não é o movimento em si, ao que não podemos atribuir nenhum sentido, senão o movimento com respeito ao corpo de referência eleito em cada caso. Por conseguinte, o corpo que sustenta os espelhos no experimento de Michelson e Morley não se encurta com respeito a um sistema de referência solidário com a Terra, mas sim com respeito a um sistema que se ache em repouso em relação ao Sol. (figura 10 explica a experiência de Michelson e Morley)

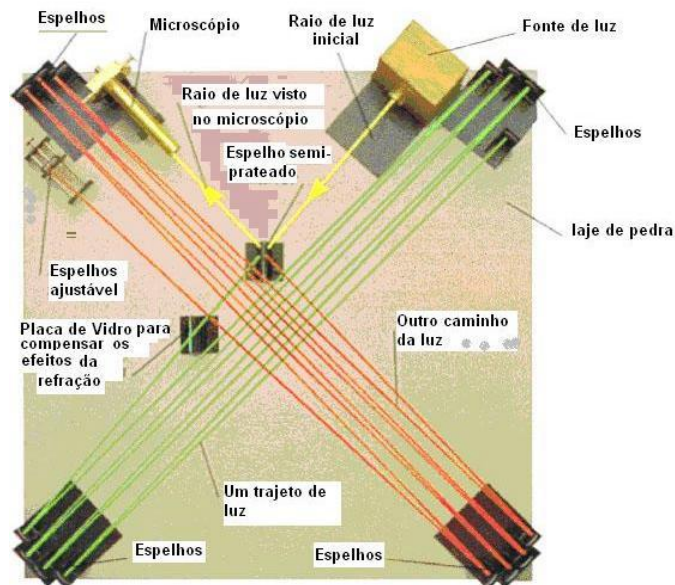



fig. 10

17. O ESPAÇO QUADRIDIMENSIONAL DE MINKOWSKI

O não matemático se sente coagido por um arrepio místico ao ouvir a palavra quadridimensional, uma sensação não diferente da provocada pelo fantasma de uma comédia. E, no entanto, não há enunciado mais banal que o que afirma do que nosso mundo cotidiano é um contínuo espaço-temporal quadridimensional.
O espaço é um contínuo tridimensional. Quer dizer isto que é possível descrever a posição de um ponto (em repouso) mediante três números **x, y, z** (coordenadas) e que, dado qualquer ponto, existem pontos arbitrariamente próximos cuja posição se pode descrever mediante valores coordenados (coordenadas) **x1, y1, z1** que se aproximam arbitrariamente às coordenadas **x, y, z** do primeiro. Devido a esta última propriedade falamos de um contínuo; devido ao caráter tríplice das coordenadas de tridimensional.
Analogamente ocorre com o Universo físico, com o que Minkowski chama brevemente mundo ou Universo, que é naturalmente quadridimensional no sentido espaço-temporário. Pois esse Universo se compõe de eventos individuais, cada um dos quais pode descrever-se mediante quatro números, a saber, três coordenadas espaciais **x, y, z** e uma coordenada temporal, o valor do tempo **t**. O Universo é neste sentido também um contínuo, pois para cada acontecimento existem outros (reais ou imagináveis) arbitrariamente próximos cujas coordenadas **x1, y1, z1, t1** se diferenciam arbitrariamente pouco das do acontecimento contemplado **x, y, z, t**. O que não estejamos useiro e vezeiro a conceber o mundo neste sentido como um contínuo quadridimensional se deve a que o tempo desempenhou na física pré-relativista um papel diferente, mais independente, frente às coordenadas espaciais, pelo qual nos habituamos a tratar o tempo como um contínuo independente. De fato, na Física Clássica o tempo é absoluto, isto é, independente da posição e do estado de movimento do sistema de referência, o qual fica patente na última equação da transformação de Galileu (**t' = t**). A Teoria da Relatividade serve na bandeja a visão quadridimensional do mundo, pois segundo esta teoria o tempo é despojado de sua independência, tal e como mostra a quarta equação da transformação de Lorentz:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Efetivamente, segundo esta equação a diferença temporária **Δt'** de dois eventos com respeito a **K'** não se anula em general, ainda que a diferença temporária **Δt** daqueles com respeito a **K** seja nulo. Uma distância puramente espacial entre dois eventos com relação a **K** tem como conseqüência uma distância temporária daqueles com respeito a **K'**. A importância da descoberta de Minkowski para o desenvolvimento formal da Teoria da Relatividade não reside também não aqui, senão no reconhecimento de que o contínuo quadridimensional da Teoria da Relatividade mostra em suas principais propriedades formais o máximo

parentesco com o contínuo tridimensional do espaço geométrico euclidiano[14]. No entanto, para fazer ressaltar do todo este parentesco é preciso substituir as coordenadas temporárias usuais **t** pela quantidade imaginária

$$\sqrt{-1}\,ct$$

proporcional a elas. As leis da natureza que satisfazem os requisitos da Teoria da Relatividade (especial) tomam então formas matemáticas nas que a coordenada temporal desempenha exatamente o mesmo papel que as três coordenadas espaciais. Estas quatro coordenadas (figura 11) se correspondem exatamente, desde o ponto de vista formal, com as três coordenadas espaciais da geometria euclidiana. Inclusive ao não matemático lhe saltará à vista que, graças a este achado puramente formal, a teoria teve que ganhar uma dose extraordinária de clareza.Tão superficiais indicações não dão ao leitor senão uma noção muito vaga das importantes idéias de Minkowski, sem as quais a Teoria da Relatividade Geral, desenvolvida a seguir em suas linhas fundamentais, teria ficado quiçá no nascedouro. Agora , como para compreender as idéias fundamentais da Teoria da Relatividade Especial ou Geral não é necessário entender com mais exatidão esta matéria, sem dúvida de difícil acesso para o leitor não exercitado na matemática, o deixaremos neste ponto para voltar sobre isso nas últimas considerações deste livro.

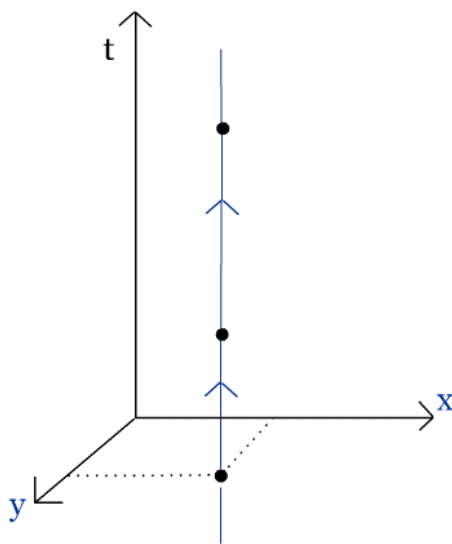



Fig. 11

[14] Cf. a exposição algo mais detalhada no Apêndice.

NOTA DO TRADUTOR

EVIDÊNCIAS DA DILATAÇÃO TEMPORAL

Uma das primeiras evidências da dilatação temporal foi obtida por meio de experimentos com uma partícula chamada múon. Quando fazemos experimentos no laboratório com múons em repouso, observamos que eles se desintegram com uma vida média de $2,2 \cdot 10^{-6}$ s. Muitos múons são criados na alta atmosfera, como resultado do bombardeio dos raios cósmicos. Esses múons movem-se com velocidade próxima da luz:

$$\mathbf{v} = 2,994 \cdot 10^{8} \text{ m/s}$$

Portanto, entre o momento em que são criados e o momento em que se desintegram, deveriam percorrer, em média, uma distância de:

$$\mathbf{d = v \cdot (\Delta t)}$$

$d = (2,994 \cdot 10^{8} \text{ m / s}) \cdot (2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s})$

$d = 650$ m

No entanto, a experiência mostra que múons criados a quase 10 km de altitude são detectados na superfície da Terra. Isso acontece por causa da dilatação temporal. Para um referencial fixo no múon, o tempo de desintegração é:

$$\mathbf{\Delta t'} = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Para um referencial fixo na Terra, temos:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Como:

$$\frac{v}{c} \cong \frac{2,994 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \cong 0,998$$

$$\frac{v^2}{c^2} \cong (0,998)^2 = 0,996$$

Assim:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong \sqrt{1 - 0,996} \cong 0,063$$

Portanto:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}}{0{,}063}$$

$$\Delta t \cong 35 \cdot 10^{-6}\,s$$

Assim, para um observador na Terra, a distância percorrida pelo múon antes de desintegrar-se é:

D = v . (Δt)

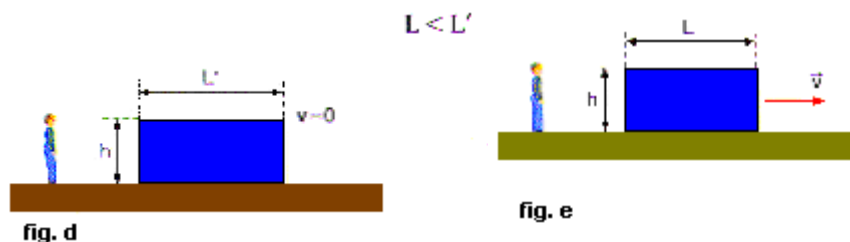
D = (2,994 . 10^{8} m / s) . (35 . 10^{-6} s)

D = 10.000 m

Outro tipo de teste, consistiu em comparar relógios atômicos, que marcam intervalos de tempo muito pequenos. Um foi mantido no solo, enquanto outro foi colocado em um avião que percorreu uma grande distância a uma grande velocidade em relação à Terra. Terminado o vôo, os relógios foram comparados e constatou-se que o relógio do avião estava ligeiramente atrasado em relação ao relógio que foi mantido no solo.

A RELATIVIDADE DO COMPRIMENTO

Suponhamos que um objeto tenha comprimento **L'** quando em repouso em relação a um observador (fig. **d**). Einstein mostrou que, quando se move com velocidade **V** (em relação a esse mesmo observador) na mesma direção em que foi medido o comprimento (fig. **e**), esse objeto apresenta um comprimento **L** tal que:

fig. d
fig. e

Observe que o comprimento **h** não se altera.
Dizemos então que houve uma contração de comprimento. A equação que liga **L'** e **L** é:

$$L = L' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

l

A contração de comprimento dada pela equação **I** pode ser percebida por meio de medidas. No entanto, o aspecto visual é outra coisa. A imagem formada na retina de um observador (ou no filme de uma máquina fotográfica) é constituída de raios de luz que chegam praticamente ao mesmo tempo na retina (ou no filme), mas partiram do objeto em momentos diferentes. A conseqüência disso é que a imagem vista (ou fotografada) é levemente distorcida. Na figura **f** mostramos um cubo em repouso. Quando esse cubo se move para a direita com velocidade próxima de ***c***, a imagem observada tem o aspecto da figura **g**, como mostra uma simulação feita em computador.

fig. f **fig. g**

A RELATIVIDADE DA MASSA

Outra conseqüência dos postulados de Einstein é que a massa inercial varia com a velocidade. Sendo $\mathbf{M_o}$ a massa de um corpo quando está em repouso em relação a um referencial inercial e **M** a massa desse mesmo corpo quando tem velocidade v em relação a esse mesmo referencial, temos:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A massa aumenta com a velocidade. Porém, para que o denominador não se anule, a velocidade **v** não pode atingir (nem superar) o valor ***c***.

É importante salientar que *massa não é matéria*.

O que aumenta com a velocidade não é a quantidade de matéria do corpo, mas sim sua massa inercial, a qual mede a inércia do corpo. Quanto maior a velocidade, maior será a inércia, isto é, mais difícil torna-se a variação de velocidade.

MASSA E ENERGIA

Entre o grande público, o aspecto mais conhecido da Teoria da Relatividade é, sem dúvida, a equação

$$\mathbf{E = m \, . \, \mathit{c}^2}$$

que relaciona a massa (**m**) com a energia (**E**).

O significado dessa equação, contudo, é bem mais complexo do que pode parecer à primeira vista. Antes de considerá-la, vamos analisar o significado de uma equação parecida com ela:

$$\mathbf{\Delta E = (\Delta m) \, . \, c^2}$$

Einstein introduziu a Teoria da Relatividade em seu trabalho "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento", escrito em junho de 1905. Em setembro do mesmo ano, ele publicou mais um pequeno trabalho, complementando o anterior, intitulado "A inércia de um corpo depende de seu conteúdo de energia?".

Nesse trabalho ele mostrou que a massa inercial de um corpo varia toda vez que esse corpo ganha ou perde energia, qualquer que seja o tipo de energia. Se um corpo receber uma quantidade de energia **ΔE**, sua massa inercial terá um aumento **Δm** dado por:

$$\mathbf{\Delta E = (\Delta m) \, . \, c^2}$$

Do mesmo modo, se o corpo perder energia, sua massa inercial irá diminuir. Assim, a massa de um tijolo quente é maior do que a de um tijolo frio; uma mola comprimida tem massa maior do que quando não estava comprimida, pois o acréscimo de energia potencial elástica ocasiona um aumento da massa inercial da mola. Quando um corpo tem sua velocidade aumentada, aumenta também sua energia cinética; é esse aumento de energia cinética que acarreta o aumento da massa inercial do corpo.
Por Exemplo: Um recipiente contém **1 kg** de água à temperatura de **3°C**. Se ela for aquecida até atingir a temperatura de **93°C**, qual será sua nova massa?
São dados:
$\mathbf{c_a}$ = calor específico da água = 1 cal / g . °C
$\boldsymbol{c}$ = velocidade da luz no vácuo = 3.10^8 m/s
1 caloria = 4 joules
Resolução:
A massa inercial da água é:
$\mathbf{M_1}$ = 1kg = 1000 g
A temperatura inicial da água é $\mathbf{q_1}$ = 3°C e a temperatura final é $\mathbf{q_2}$ = 93°C.
Assim, a variação de temperatura é:
$\mathbf{\Delta q = q_2 - q_1}$ = 93°C - 3°C = 90°C
Deixando de lado os cuidados com os algarismos significativos, a quantidade de calor absorvida pela água foi:

$\mathbf{Q = m \cdot c_a \cdot (\Delta q)}$ = (1 000 g).(1 cal / g, °C).(90 °C)
$Q = 9.10^4$ cal = 36.10^4 J
Essa quantidade de calor é a energia absorvida pela água, ou seja:
$\mathbf{\Delta E = Q} = 36.10^4$ J
Da equação $\mathbf{\Delta E = (\Delta m) \cdot c^2}$ tiramos:
$\mathbf{\Delta m = \Delta E / c^2} = 36.10^4$ J / (3.10^8 m/s^2)
$\mathbf{\Delta m} = 36.10^4$ J / (9.10^{16} m^2/s^2)
$\mathbf{\Delta m} = 4.10^{-12}$ Kg = 0,000000000004 Kg
Como vemos é uma variação muito pequena, que mesmo as balanças mais precisas não conseguem determinar. Mas, de qualquer modo, sendo m_2 a massa final da água teremos:
$\mathbf{m_2 = m_1 + Dm}$ = 1Kg + 0,000000000004 Kg
$\mathbf{\Delta m}$ = 1,000000000004 Kg

Nas aulas de Química você deve ter aprendido a lei da conservação da massa de Lavoisier. Segundo essa lei, a massa total dos reagentes é igual à massa total dos produtos de uma reação química. Agora sabemos que essa igualdade é aproximada, pois durante uma reação química em geral há absorção ou liberação de calor (ou luz) para o ambiente. Desse modo há uma variação de massa.

Porém, como ocorreu no exemplo anterior, essa variação de massa é tão pequena que as balanças não conseguem determiná-la. Só foi possível verificar a validade da equação de Einstein quando os físicos conseguiram analisar as transformações com os núcleos dos átomos, pois, durante essas transformações, as variações de massa são muito maiores do que as que ocorrem numa reação química e, assim, podem ser mais facilmente percebidas. É importante ressaltar que no interior do núcleo há dois tipos de energia potencial: a energia potencial elétrica, devida à repulsão elétrica entre os prótons, e a energia potencial nuclear, correspondente à força nuclear que mantém os componentes do núcleo unidos.

Quando a equação $\mathbf{\Delta E = (\Delta m) \cdot c^2}$ é comentada em artigos publicados em jornais ou revistas, freqüentemente lemos frases do tipo: "A energia pode ser convertida em massa, e vice-versa". Essa frase, porém, não está correta. Não há conversão de energia em massa (ou vice-versa). Vejamos por quê.

Em primeiro lugar a massa não é uma "**coisa**", mas sim **uma propriedade**, é uma medida da inércia. **Portanto, não pode ser convertida (transformada) em nada**.

Em segundo lugar quando há conversão, algo deve desaparecer para dar lugar a outra coisa. No entanto, quando fornecemos energia a um corpo, ela não desaparece, continua lá, como energia. Consideremos, por exemplo, o caso da compressão de uma mola. Ao comprimirmos a mola, fornecemos a ela uma energia que fica armazenada na forma de energia potencial elástica, ela não desaparece. Então, por que essa energia produz um aumento da massa da mola?
A energia produz aumento da massa porque tem inércia, isto é, a energia tem massa.

Por isso, um dos trabalhos de Einstein sobre a relação entre massa e energia, publicado em 1907, tinha o seguinte título: "Sobre a inércia da energia, como conseqüência do princípio de relatividade".

Outra noção freqüente que também deve ser evitada é a da equivalência entre massa e energia, pois ela dá uma idéia de igualdade entre massa e energia, o que não é verdade. A massa inercial mede a inércia de um corpo, isto é, sua resistência a mudanças de velocidade, enquanto a energia representa, numa definição simplificada, capacidade de realizar trabalho.

O que podemos dizer, então, é que a equação de Einstein exprime uma proporcionalidade entre os valores numéricos das variações de massa e energia.

O equívoco com a palavra conversão tem como origem o fenômeno que comentaremos a seguir.

MATÉRIA E RADIAÇÃO

De acordo com a Física Clássica, as ondas eletromagnéticas se propagam de uma maneira contínua. No entanto, de acordo com a Mecânica Quântica, as ondas eletromagnéticas se propagam na forma de "pacotinhos" denominados fótons. Cada fóton tem uma quantidade de energia que depende da freqüência da onda eletromagnética, como veremos no próximo apêndice. Aqui, para simplificar os termos empregados, chamaremos uma onda eletromagnética de radiação.

Existe variadas transformações de radiação em matéria, como o reproduzido na figura 13, onde um fóton se transforma em duas partículas materiais, que são um elétron e um pósitron.

Transformação de um foton (Ψ) em um elétron (e^-) e um pósitron (e^+)

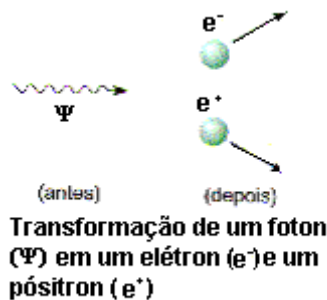
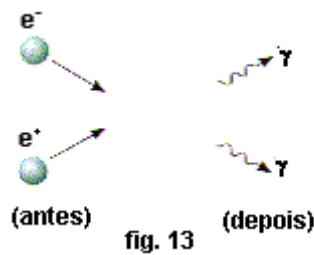



fig.12

Também é possível o fenômeno inverso: a transformação de matéria em radiação.

Na figura 13 mostramos o caso em que um elétron se encontra com um pósitron, produzindo dois fótons.

fig. 13

Nestes dois casos podemos dizer que houve conversão, pois algo desapareceu dando origem a outra coisa.

Durante o século XX, os físicos constataram que para cada partícula existe uma antipartícula de modo que, ao se encontrarem, se aniquilam, isto é, transformam-se em radiação. Quando isso ocorre, a equação $\Delta E = (\Delta m) \cdot c^2$ pode ser usada para relacionar a energia da radiação com a massa da matéria.
Quando um corpo tem massa **m** podemos dizer que esse corpo tem um conteúdo energético **E** dado por:

$$E = m \cdot c^2$$

O conteúdo energético do corpo é a soma de sua energia cinética com todas as energias armazenadas no seu interior e com a energia da radiação que pode ser obtida pela conversão de suas partes materiais.

Na Física Clássica, a energia cinética de um corpo de massa **m** e velocidade **v** é dada por:

$$E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

No entanto, de acordo com a Teoria da Relatividade, essa equação nos dá o valor aproximado de energia cinética quando a velocidade **v** é pequena em comparação com ***c***, a velocidade da luz. A equação que nos dá o valor exato da energia cinética é outra. Suponhamos que um corpo em repouso (em relação a um determinado referencial inercial) tenha massa **m** a qual é chamada massa de repouso; nesse caso o seu conteúdo energético é:

$$E_o = m_o \cdot c^2$$

chamado de energia de repouso. Se uma força realizar trabalho sobre o corpo, ele passará a ter uma velocidade li e uma massa m dada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Com isso, o novo conteúdo energético do corpo será dado por:

$$E = m \cdot c^2$$

A energia cinética do corpo é dada pela diferença entre **E** e E_o:

$$E_c = E - E_o$$

$$E_c = m \cdot c^2 - m_o \cdot c^2$$

$$E_c = (m + m_o) \cdot c^2$$

ENERGIA DE LIGAÇÃO

Podemos usar a equação de Einstein para calcular a energia potencial armazenada nos núcleos dos átomos.

Consideremos, por exemplo, o caso do núcleo de um dos isótopos do hélio, o He (fig. 14), composto de dois prótons e dois nêutrons. Esse núcleo é também chamado de partícula alfa. Vamos supor que, de algum modo, nós consigamos juntar dois prótons e dois nêutrons para formar a partícula alfa:

$$p + p + n + n \rightarrow \alpha$$

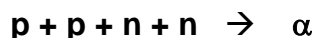



fig. 14

Essa reação é um exemplo de fusão nuclear. Uma fusão é uma reação em que duas ou mais partículas se unem para formar um corpo maior. Consultando uma tabela, obtemos as massas de repouso dos elementos que participam da fusão:

$\mathbf{m_p}$ = massa do próton = 1,00728 **u**

$\mathbf{m_n}$ = massa do nêutron = 1,00867 **u**

$\mathbf{m_a}$ = massa da partícula alfa = 4,00260 **u**

em que **u** é a unidade de massa atômica, dada por:

1 u = $1{,}66054.10^{-27}$ Kg

Vamos calcular a massa total ($\mathbf{m_t}$) antes da reação:

$\mathbf{m_t = 2\,m_p + 2\,m_n}$ = 2.(1,00728 **u**) +2.(1,00867 **u**) → $\mathbf{m_t}$ = 2,01456 u +2,01734 **u** = 4,03190 **u**

Podemos observar que $\mathbf{m_t > m_a}$ isto é, a massa total antes da reação é maior do que a massa da partícula alfa. Durante a reação houve uma perda de massa. Como isso aconteceu? Será que, durante a reação, algum próton ou nêutron perdeu um "pedaço" ? Não, prótons e nêutrons continuam "inteiros". A razão dessa perda de massa está na perda de energia. Durante a fusão há uma liberação de energia, e essa energia tem massa. Vamos calcular a energia liberada, calculando antes a variação de massa:

$\mathbf{\Delta m = m_a + m_t}$ = (4,00260 **u**) - (4,03190 u) = - 0,0293 **u**

Assim:

$\mathbf{|\Delta m|}$ = 0,0293 **u** = (0,0293 **u**) . ($1{,}66054.10^{-27}$ Kg) = $4{,}865.10^{-29}$ Kg

Portanto, a energia liberada foi:

$\mathbf{\Delta E = |\Delta m|.c^2}$ = ($4{,}865.10^{-29}$ Kg) . ($3{,}0.10^{8}$ m/s)^2 = $4{,}3785.10^{-12}$ J

Após essa liberação de energia, fica armazenada na partícula alfa uma energia potencial (**E_p**) negativa cujo módulo é igual à energia liberada na fusão:

$$E_p = - 4,3785.10^{-12} \text{ J}$$

Essa energia é a soma de duas energias potenciais: a energia potencial elétrica (**${}^E E_p$**) corresponde à repulsão elétrica dos prótons e a energia potencial nuclear (**${}^N E_p$**) correspondente à força nuclear, que mantém o núcleo coeso:

$$\mathbf{E_p = {}^E E_p + {}^N E_p}$$

Como a força elétrica é de repulsão, devemos ter **${}^E E_p > 0$** e, como a força nuclear é de atração, devemos ter **${}^N E_p < 0$**. O fato de o núcleo se manter coeso significa que, em módulo, a energia nuclear é maior do que a energia elétrica:

$$\mathbf{| {}^N E_p | > | {}^E E_p |}$$

de modo que a soma é negativa (**$E_p < 0$**).

O módulo de **E_p** é chamado de energia de ligação do núcleo (**E_L**):

$$\mathbf{E_L = | E_p | = 4,3785.10\text{-}12 \text{ J}}$$

A energia de ligação é a energia mínima que devemos fornecer ao núcleo para separar seus componentes.

No interior do Sol ocorrem vários tipos de reações de fusão e são essas reações que produzem a energia emitida por ele.

UNIDADES DE MASSA E ENERGIA

Os físicos nucleares usam freqüentemente unidades que não pertencem ao Sistema Internacional.

No caso da energia, em vez do joule eles preferem o elétron-volt (**eV**). Como vimos no estudo da Eletricidade, 1 **eV** expresso em joule é numericamente igual à carga elementar expressa em Coulomb. Adotando para a carga elementar o valor mais preciso:

$$\mathbf{e} = 1,6021773 \ . \ 10^{-19} \text{ C}$$

temos:

$$\mathbf{1 \ eV} = 1,6021773 \ . \ 10^{-19} \text{ J}$$

ou:

$$\mathbf{1 \ J} = \frac{\mathbf{1 \ eV}}{1,6021773.l0^{-19}}$$

Outras unidades freqüentemente usadas são **o kev** e o **MeV**:

1 kev = 10(3) eV **1MeV = 10(6) eV**

No caso da massa, são usadas com freqüência a unidade de massa atômica (**u**) e também uma outra unidade obtida a partir da equação de Einstein:

$$\mathbf{E = m \ . \ c^2 \rightarrow m = \frac{E}{c^2}}$$

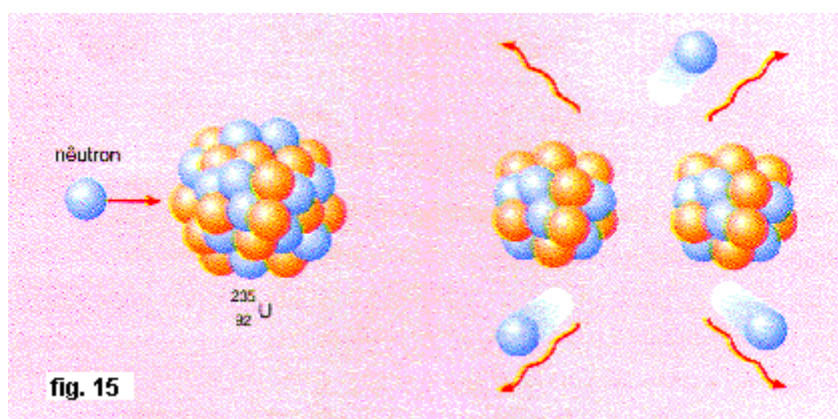
Expressando a energia em MeV, obtemos a massa numa outra unidade: o **Mev / *c*^{2}**. Vamos obter a equivalência entre o **kg** e o **Mev / *c*^{2}**, fazendo **m** = 1 kg e adotando para a velocidade da luz o valor mais preciso: ***c*** = 2,9979246 . 10^8 m/s.

E = m . *c*^{2} = (1kg) . (2,9979246 . 10^8 m/s) = 8,987552 . l0^{16} J = (8,987552 .10^{16}) . 10^{19} eV / 1,6021773 = 5,6095864 . 10^{35} eV = 5,6095864 . 10^{29} MeV

Portanto:

$$1 \text{ kg} = 5,6095864 \ . \ 10^{29} \ \mathbf{MeV / c^2}$$

Freqüentemente ouvimos dizer que a equação $\Delta E=(\Delta m).c^2$ tornou possível a fabricação da bomba atômica. Porém, isso não é verdade, como veremos a seguir:
Um dos tipos de bomba atômica é construído a partir da fissão (fragmentação) do núcleo do átomo de urânio (fig. 15). Um nêutron atinge o núcleo de urânio tomando-o instável.
Com isso o núcleo de urânio se divide em dois núcleos menores com emissão de dois ou três nêutrons e alguns fótons. Nesse processo, uma parte da energia potencial armazenada no núcleo (elétrica e nuclear) transforma-se em radiação e energia cinética dos fragmentos que resultam após a fissão. Não há alteração no número total de prótons e nêutrons, isto é, não há conversão de matéria em radiação, mas apenas transformações de energia.

fig. 15

Se quisermos, podemos calcular as variações de massa e energia e, com isso, confirmar a validade da equação de Einstein. No entanto, não precisamos da equação para construir (e explodir) a bomba.

18. PRINCÍPIOS DA RELATIVIDADE ESPECIAL E GERAL

A tese fundamental ao redor da qual giravam todas as considerações anteriores era o Princípio da Relatividade Especial, isto é, o Princípio da Relatividade física de todo movimento uniforme. Voltemos a analisar exatamente seu conteúdo. Que qualquer movimento há que o entender conceitualmente como um movimento meramente relativo é algo que sempre foi evidente. Voltando ao exemplo, tantas vezes freqüentado já, do barranco e o vagão de transporte ferroviário, o fato do movimento que aqui tem lugar cabe expressá-lo com igual razão em qualquer das duas formas seguintes: a) o vagão se move com respeito ao barranco, b) o barranco se move com respeito ao vagão. No *caso **a***) é o barranco o que faz as vezes de corpo de referência; no *caso **b)***, o vagão. Quando se trata simplesmente de constatar ou descrever o movimento é teoricamente indiferente a que corpo de referência se refira o movimento. O qual é, repetimos, evidente e não devemos confundi-lo com a proposição, bem mais profunda, que chamamos Princípio de Relatividade e na que baseamos nossas considerações. O princípio que nós utilizamos não se limita a sustentar que para a descrição de qualquer acontecimento se pode eleger o mesmo o vagão que o barranco como corpo de referência (porque também isso é evidente).

Nosso princípio afirma melhor do que: se se formulam as leis gerais da natureza, tal e como resultam da experiência, servindo-se ***a)*** do barranco como corpo de referência, ***b)*** do vagão como corpo de referência, em ambos casos ditas leis gerais (p. ex., as leis da Mecânica ou a lei da propagação da luz no vácuo) têm exatamente o mesmo enunciado. Dito de outra maneira: na descrição física dos processos naturais não há nenhum corpo de referência **K** ou **K'** que se distinga do outro. Este último enunciado não tem que se verificar necessariamente a priori, como ocorre com o primeiro; não está contido nos conceitos de movimento e corpo de referência, nem pode deduzir-se deles, senão que sua verdade ou falsidade depende só da experiência.

Agora , nós não afirmamos até agora para nada a equivalência de todos os corpos de referência **K** face à formulação das leis naturais. O caminho que melhor seguimos foi o seguinte. Partimos inicialmente do suposto de que existe um corpo de referência **K** com um estado de movimento com respeito ao qual se cumpre o princípio fundamental de Galileu: um ponto material abandonado a sua sorte e afastado o suficiente de todos os demais se move uniformemente e em linha reta. Referidas a **K** (corpo de referência de Galileu), as leis da natureza deviam ser o mais singelas possível. Mas à margem de **K**, deveriam ser privilegiados neste sentido e exatamente equivalentes a **K** face à formulação das leis da natureza todos aqueles corpos de referência **K'** que executam com respeito a **K** um

movimento retilíneo, uniforme e irrotacional: a todos estes corpos de referência se os considera corpos de referência de Galileu. A validade do Princípio da Relatividade somente a supusemos para estes corpos de referência, não para outros (animados de outros movimentos).

Neste sentido falamos do Princípio da Relatividade Especial ou da Teoria da Relatividade Especial. Em contraposição ao anterior entenderemos por Princípio da Relatividade Geral o seguinte enunciado: todos os corpos de referência **K**, **K'**, etc., seja qual for seu estado de movimento, são equivalentes face à descrição da natureza (formulação das leis naturais generais). Apressemo-nos a assinalar, no entanto, que esta formulação é preciso substituí-la por outra mais abstrata, por razões que virão à luz mais adiante.

Uma vez que a introdução do Princípio da Relatividade Especial saiu airosa, tem que ser tentador, para qualquer espírito que aspire à generalização, o atrever-se a dar o passo que leva ao Princípio da Relatividade Geral. Mas basta uma observação muito simples, em aparência perfeitamente verossímil, para que a tentativa pareça em princípio condenada ao fracasso. Imagine-se o leitor instalado nesse famoso vagão de trem que viaja com velocidade uniforme. Enquanto o vagão mantenha sua marcha uniforme, os ocupantes não notarão nada no movimento do trem; o qual explica assim mesmo que o ocupante possa interpretar a situação no sentido de que o vagão está em repouso e que o que se move é o barranco, sem sentir que isso violenta sua intuição. E segundo o Princípio da Relatividade Especial, esta interpretação está perfeitamente justificada do ponto de vista físico.

Agora , se o movimento do vagão se faz não uniforme porque o trem freia violentamente, suponhamos por acaso, o viajante experimentará um puxão igual de força para adiante. O movimento acelerado do vagão se manifesta no comportamento mecânico dos corpos com respeito a ele; o comportamento mecânico é diferente que no caso antes considerado, e por isso parece estar excluído que com relação ao vagão em movimento não uniforme valham as mesmas leis mecânicas que com respeito ao vagão em repouso ou em movimento uniforme. Em qualquer caso, está claro que em relação ao vagão que se move não uniformemente não vale o princípio fundamental de Galileu. Daí que num primeiro momento nos sintamos impelidos a atribuir, na contramão do Princípio da Relatividade Geral, uma espécie de realidade física absoluta ao movimento não uniforme. A seguir veremos, no entanto, que esta inferência não é correta.

19. O CAMPO GRAVITACIONAL

À pergunta de por que cai ao solo uma pedra atirada ao ar costuma responder-se porque é atraída pela Terra. A Física moderna formula a resposta de um modo algo diferente, pela seguinte razão. Através de um estudo mais detido dos fenômenos eletromagnéticos se chegou à conclusão de que não existe uma ação imediata a distância. Quando um imã atrai um bocado de ferro, por exemplo, não podemos nos contentar com a explicação de que o imã atua diretamente sobre o ferro através do espaço no meio do vácuo; o que se faz é, segundo idéia de Faraday, imaginar que o imã cria sempre no espaço circundante algo fisicamente real que se denomina campo magnético. Este campo magnético atua por sua vez sobre o bocado de ferro, que tende mover-se para o imã. Não vamos entrar aqui na justificativa deste conceito interveniente que em si é arbitrário. Assinalemos tão só que com sua ajuda é possível explicar teoricamente de modo bem mais satisfatório os fenômenos eletromagnéticos, e em especial a propagação das ondas eletromagnéticas. De maneira análoga se interpreta também a ação da gravidade. A influência da Terra sobre a pedra se produz indiretamente.

A Terra cria ao redor seu um campo gravitacional. Este campo atua sobre a pedra e ocasiona seu movimento de queda. A intensidade da ação sobre um corpo decresce ao afastar-se mais e mais da Terra, e decresce segundo uma lei determinada. O qual, em nossa interpretação, quer dizer que: a lei que rege as propriedades espaciais do campo gravitacional tem que ser uma lei muito determinada para representar corretamente a diminuição da ação gravitacional com a distância ao corpo que exerce a ação. Supõe-se, por exemplo, que o corpo (a Terra, por caso) gera diretamente o campo em sua vizinhança imediata; a intensidade e direção do campo a distâncias maiores vêm então determinadas pela lei que rege as propriedades espaciais dos campos gravitacionais. O campo gravitacional, ao invés do campo elétrico e magnético, mostra uma propriedade sumamente peculiar que é de importância fundamental para o que segue.

Os corpos que se movem sob a ação exclusiva do campo gravitacional experimentam uma aceleração que não depende minimamente nem do material nem do estado físico do corpo. Um bocado de chumbo e um bocado de madeira, por exemplo, caem exatamente igual no campo gravitacional (na ausência de ar) quando os deixamos cair sem velocidade inicial ou com velocidades iniciais iguais. Esta lei, que se cumpre com extremada exatidão, pode-se formular também de outra maneira sobre a base da seguinte consideração. Segundo a lei do movimento de Newton temos:

*(**força**)* = *(**massa inercial**)* • *(**aceleração**)*,

onde a massa inercial é uma constante característica do corpo acelerado. Se a força aceleradora é a da gravidade, temos, por outro lado, que:

$$(\textbf{força}) = \frac{\textbf{massa gravitacional}}{\textbf{massa inercial}} \times (\textbf{intensidade do campo gravitacional})$$

Pois bem, se queremos que para um campo gravitacional dado a aceleração seja sempre a mesma, independentemente da natureza e do estado do corpo, tal e como demonstra a experiência, a relação entre a massa gravitacional e a massa inercial tem que ser também igual para todos os corpos. Mediante adequada eleição das unidades pode fazer-se que esta relação valha **1(um)**, sendo então válido o teorema seguinte: a massa gravitacional e a massa inercial de um corpo são iguais. A antiga mecânica registrou este importante princípio, mas não o interpretou. Uma interpretação satisfatória não pode surgir senão reconhecendo que a mesma qualidade do corpo se manifesta como inércia ou como gravidade, segundo as circunstâncias. Nos parágrafos seguintes veremos até que ponto é esse o caso e daí relação guarda esta questão com o postulado da Relatividade Geral.

20. A IGUALDADE ENTRE MASSA INERCIAL E MASSA GRAVITACIONAL COMO ARGUMENTO A FAVOR DO POSTULADO DA RELATIVIDADE GERAL

Imaginemos uma porção ampla de espaço vazio, tão afastada de estrelas e de grandes massas que possamos dizer com suficiente exatidão que nos encontramos ante o caso previsto na lei fundamental de Galileu. Nesta parte do Universo é então possível eleger um corpo de referência de Galileu com respeito ao qual os pontos em repouso permanecem em repouso e os pontos em movimento persistem constantemente num movimento uniforme e retilíneo. Como corpo de referência nos imaginamos uma espaçosa gaveta com a forma de uma habitação; e supomos que em seu interior se acha um observador equipado de aparelhos. Para ele não existe, como é natural, nenhuma gravidade. Tem que se sujeitar com cordas ao andar, sob pena de ver-se lançado para o teto ao mínimo golpe contra o solo.

Suponhamos que no centro do teto da gaveta, por fora, há um gancho com uma corda, e que um ser — cuja natureza nos é indiferente — começa a atirar dela com força constante. A gaveta, junto com o observador, começará a voar para acima com movimento uniformemente acelerado. Sua velocidade adquirirá com o tempo cotas fantásticas... sempre que julguemos tudo isso desde outro corpo de referência do qual não se atire com uma corda. Mas o homem que está na gaveta como julga o processo? O solo da gaveta lhe transmite a aceleração. Por pressão contra os pés. Portanto, tem que contrabalançar esta pressão com ajuda de suas pernas se não quer medir o solo com seu corpo. Por conseguinte, estará de pé na gaveta igual que o está uma pessoa numa habitação de qualquer moradia terrestre. Se solta um corpo que antes sustentava na mão a aceleração da gaveta deixará de atuar sobre aquele, pelo qual se aproximará ao solo em movimento relativo acelerado.

O observador se convencerá também de que a aceleração do corpo com respeito ao solo é sempre igual grandeza, independentemente do corpo com que realize o experimento. Apoiando-se em seus conhecimentos do campo gravitacional, tal e como os comentamos na última seção, o homem chegará assim à conclusão de que se acha, junto com a gaveta, no seio de um campo gravitacional bastante constante. Por um momento se surpreenderá, no entanto, de que a gaveta não caia neste campo gravitacional, mas depois descobre o gancho no centro do teto e a corda tensa sujeita a ele e infere corretamente que a gaveta está pendurada em repouso no dito campo. É lícito rir-se do homem e dizer que sua concepção é um erro?
Opino que, se queremos ser conseqüentes, não podemos fazê-lo, devendo admitir pelo contrário que sua explicação não atenta nem contra a razão nem contra as leis mecânicas conhecidas. Ainda que a gaveta se ache acelerada com respeito ao espaço de Galileu considerado em primeiro lugar, cabe contemplá-lo como imóvel.

Temos, pois, boas razões para estender o Princípio de Relatividade a corpos de referência que estejam acelerados uns com respeito a outros, tendo ganhado assim um potente argumento a favor de um Postulado de Relatividade Generalizado.

Tome-se boa nota de que a possibilidade desta interpretação descansa na propriedade fundamental que possui o campo gravitacional de comunicar a todos os corpos a mesma aceleração, ou o que vem ser o mesmo, no postulado da igualdade entre massa inercial e massa gravitacional. Se não existisse esta lei da natureza, o homem na gaveta acelerada não poderia interpretar o comportamento dos corpos circundantes a base de supor a existência de um campo gravitacional, e nenhuma experiência lhe autorizaria a supor que seu corpo de referência está em repouso.

Imaginemos agora que o homem da gaveta ata uma corda na parte interior do teto e fixa um corpo no extremo livre. O corpo fará que a corda pendure verticalmente em estado tenso. Perguntemo-nos pela causa da tensão. O homem na gaveta dirá: O corpo suspenso experimenta no campo gravitacional uma força para abaixo e se mantém em equilíbrio devido à tensão da corda; o que determina a magnitude da tensão é a massa gravitacional do corpo suspenso. Por outro lado, um observador que bóie livremente no espaço julgará a situação assim: A corda se vê obrigada a participar do movimento acelerado da gaveta e o transmite ao corpo sujeito a ela.

A tensão da corda é justamente suficiente para produzir a aceleração do corpo. O que determina a magnitude da tensão na corda é a massa inercial do corpo. Neste exemplo vemos que a extensão do Princípio de Relatividade põe de manifesto a necessidade do postulado da igualdade entre massa inercial e gravitacional. Com o qual conseguimos uma interpretação física deste postulado.

O exemplo da gaveta acelerada demonstra que uma Teoria da Relatividade Geral tem proporcionar resultados importantes em ponto às leis da gravitação.

E com efeito, o desenvolvimento conseqüente da idéia da Relatividade geral forneceu as leis que satisfazem o campo gravitacional. No entanto, tenho de prevenir desde este mesmo momento ao leitor de uma confusão a que podem induzir estas considerações. Para o homem da gaveta existe um campo gravitacional, pese a não existir tal com respeito ao sistema de coordenadas inicialmente eleito.

Diria-se então que a existência de um campo gravitacional é sempre meramente aparente. Poderia pensar-se que, independentemente do campo gravitacional que exista, sempre caberia eleger outro corpo de referência de tal maneira que com respeito a ele não existisse nenhum. Pois bem, isso não é verdadeiro para qualquer campo gravitacional, senão só para aqueles que possuem uma estrutura muito especial.

É impossível, por exemplo, eleger um corpo de referência com respeito ao qual o campo gravitacional da Terra desapareça (em toda sua extensão).

Agora nos damos conta do por que do argumento esgrimido ao final da seção18 contra o Princípio da Relatividade Geral não é concludente.
Sem dúvida é verdadeiro que o observador que se acha no vagão sente um puxão para adiante como conseqüência da freada, e é verdade que em isso nota a não uniformidade do movimento. Mas ninguém lhe obriga a atribuir o puxão a uma aceleração real do vagão. Igual poderia interpretar o episódio assim: Meu corpo de referência (o vagão) permanece constantemente em repouso. No entanto, (durante o tempo de freada) existe com respeito a ele um campo gravitacional temporariamente variável, dirigido para adiante.

Sob a influência deste último, o barranco, junto com a Terra, move-se não uniformemente,de sorte que sua velocidade inicial, dirigida para atrás, diminui cada vez mais. Este campo gravitacional é também o que produz o puxão do observador.

21. ATÉ QUE PONTO SÃO INSATISFATÓRIAS AS BASES DA MECÂNICA E DA TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL?

Como já dissemos em várias ocasiões, a Mecânica Clássica parte do princípio seguinte: os pontos materiais suficientemente afastados de outros pontos materiais se movem uniformemente e em linha reta ou persistem em estado de repouso. Também sublinhamos repetidas vezes que este princípio fundamental só pode ser válido para corpos de referência **K** que se encontram em determinados estados de movimento e que se acham em movimento de translação uniforme uns com respeito a outros.

Com relação a outros corpos de referência **K'** não vale o princípio. Tanto na Mecânica Clássica como na Teoria da Relatividade Especial se distingue, portanto, entre corpos de referência **K** com respeito aos quais são válidas as leis da natureza e corpos de referência **K'** com respeito aos quais não o são.Agora, nenhuma pessoa que pense com um mínimo de lógica se dará por satisfeita com este estado de coisas, e perguntará: Como é possível que determinados corpos de referência (ou bem seus estados de movimento) sejam privilegiados frente a outros (ou frente a seus estados de movimento respectivos)? Qual é a razão desse privilégio.
Para mostrar claramente o que quero dizer com esta pergunta, me servirei de uma comparação. Estou ante um pequeno forno de gás. Sobre ele se encontram, uma ao lado da outra, duas panelas de cozinha idênticas, até o ponto de que poderíamos confundi-las. Ambas estão com água até a metade. Advirto que de uma delas sai ininterruptamente vapor, enquanto da outra não, o qual me chamará atenção ainda que jamais me tenha jogado à cara um fornilho de gás nenhuma panela de cozinha.
Se então percebo um algo que brilha com luz azulada sob a primeira panela, mas não sob a segunda, se desvanecerá meu assombro ainda no caso de que jamais tenha visto uma chama de gás, pois agora poderei dizer que esse algo azulado é a causa, ou ao menos a possível causa da emanação de vapor. Mas se não percebo sob nenhuma das duas panelas esse algo azulado e vejo que a uma não cessa de jogar vapor enquanto na outra não é assim, então não sairei do assombro e da insatisfação até que detecte alguma circunstância à que possa fazer responsável do díspar comportamento das duas panelas.
Analogamente, procuro em vão na Mecânica Clássica (ou na Teoria da Relatividade Especial) algo real que possa atribuir o díspar comportamento dos corpos com respeito aos sistemas **K** e **K'**[15]. Esta objeção Newton já tinha visto, e tentou em vão neutralizá-la. Mas foi E. Mach que a detectou com maior clareza, propondo como solução colocar a Mecânica sobre fundamentos novos. A objeção somente se pode evitar numa física que se corresponda com o Princípio da Relatividade Geral, porque as equações de uma teoria semelhante valem para qualquer corpo de referência, seja qual for seu estado de movimento.

[15] A objeção adquire especial contundência quando o estado de movimento do corpo de referência é tal que para mantê-lo não requer de nenhuma influência exterior, por exemplo no caso de que o corpo de referência role uniformemente.

22. ALGUMAS CONCLUSÕES DO PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE GERAL

As considerações feitas na seção 20 mostram que o Princípio da Relatividade Geral nos permite deduzir propriedades do campo gravitacional por via puramente teórica. Suponhamos, efetivamente, que conhecemos a evolução espaço-tempo de um processo natural qualquer, tal e como ocorre no terreno galileano com respeito a um corpo de referência de Galileu **K**. Nestas condições é possível averiguar mediante operações puramente teóricas, isto é, por simples cálculos, como se comporta este processo natural conhecido com respeito a um corpo de referência **K'** que está acelerado com relação a **K** e como com respeito a este novo corpo de referência **K'** existe um campo gravitacional, o cálculo nos informa de como influi o campo gravitacional no processo estudado.

Assim descobrimos, por um caso, que um corpo que com respeito a **K** executa um movimento uniforme e retilíneo (segundo o princípio de Galileu), executa com respeito ao corpo de referência acelerado **K'** (gaveta) um movimento acelerado, de trajetória geralmente curvada. Esta aceleração, ou esta curvatura, responde à influência que sobre o corpo móvel exerce o campo gravitacional que existe com respeito a **K'**. Que o campo gravitacional influi deste modo no movimento dos corpos é já sabido, de maneira que a reflexão não contribui nada fundamentalmente novo. Sim se obtém, em troca, um resultado novo e de importância capital ao fazer considerações equivalentes para um raio de luz. Com respeito ao corpo de referência de Galileu **K**, propaga-se em linha reta com velocidade ***c***. Com respeito à gaveta acelerada (corpo de referência **K'**), a trajetória do mesmo raio de luz já não é uma reta, como se deduz facilmente. De aqui se infere que os raios de luz no seio de campos gravitacionais se propagam em geral segundo linhas curvas. Este resultado é de grande importância por dois conceitos.

Em primeiro lugar, cabe contrastá-lo com a realidade. Ainda que uma reflexão detida demonstra que a curvatura que prediz a Teoria da Relatividade Geral para os raios luminosos é minúscula no caso dos campos gravitacionais que nos brinda a experiência, tem que ascender a 1,7 segundos de arco para raios de luz que passam pelas imediações do Sol. Este efeito deveria traduzir-se no fato de que as estrelas fixas situadas nas cercanias do Sol, e que são observáveis durante eclipses solares totais, apareçam afastadas dele nessa quantidade, comparado com a posição que ocupam para nós no céu quando o Sol se acha em outro lugar da abóbada celeste. A comprovação da verdade ou falsidade deste resultado é uma tarefa da máxima importância, cuja solução é de esperar que nos a dêem muito cedo os astrônomos.[16]

Em segundo lugar, a conseqüência anterior demonstra que, segundo a Teoria da Relatividade Geral, a tantas vezes mencionada lei da constância da velocidade da luz no vácuo — que constitui um dos dois supostos básicos da Teoria da

[16] A existência do desvio da luz exigida pela teoria foi comprovada fotograficamente durante o eclipse de Sol do 30 de maio de 1919 por duas expedições organizadas pela Royal Society sob a direção dos astrônomos Eddington e Crommelin.

Relatividade Especial — não pode aspirar validade ilimitada, pois os raios de luz somente podem curvar-se se a velocidade de propagação desta varia com a posição. Caberia pensar que esta conseqüência dá ao fracasso com a Teoria da Relatividade especial e com toda a Teoria da Relatividade em general. Mas em realidade não é assim. Tão só cabe inferir que a Teoria da Relatividade especial não pode arrogar-se validez num campo ilimitado; seus resultados só são válidos na medida em que se possa prescindir da influência dos campos gravitacionais sobre os fenômenos (os luminosos, por exemplo).

Tida conta de que os detratores da Teoria da Relatividade afirmaram com freqüência que a Relatividade geral tira pela borda a Teoria da Relatividade especial,vou aclarar o verdadeiro estado de coisas mediante uma comparação. Antes de ficar estabelecida a Eletrodinâmica, as leis da Eletrostática passavam por ser as leis da Eletricidade em geral. Hoje sabemos que a Eletrostática só pode explicar corretamente os campos elétricos no caso —que em rigor jamais se dá— de do que as massas elétricas estejam estritamente em repouso umas com respeito a outras e em relação ao sistema de coordenadas. Quer dizer isso que as equações de campo eletrodinâmicas de Maxwell tenham atirado pela borda à Eletrostática? De nenhum modo! A Eletrostática se contém na Eletrodinâmica como caso limite; as leis desta última conduzem diretamente às daquela supondo que os campos sejam temporariamente invariáveis. O senão mais formoso de uma teoria física é o de assinalar o caminho para estabelecer outra mais ampla, em cujo seio subsiste como caso limite.

No exemplo que acabamos de comentar, o da propagação da luz, temos visto que o Princípio da Relatividade Geral nos permite derivar por via teórica a influência do campo gravitacionais sobre a evolução de fenômenos cujas leis são já conhecidas para o caso de que não exista campo gravitacional. Mas o problema mais atraente de entre aqueles cuja clave proporciona a Teoria da Relatividade Geral tem do que ver com a determinação das leis que cumpre o próprio campo de gravitação. A situação é aqui a seguinte.

Conhecemos regiões espaço-temporais que, prévia eleição adequada do corpo de referência comportam-se (aproximadamente) ao modo galileano, isto é, regiões nas quais não existem campos gravitacionais. Se referimos uma região semelhante a um corpo de referência de movimento arbitrário **K'**, então existe com respeito a **K'** um campo gravitacional temporal e espacialmente variável[17]. A estrutura deste campo depende naturalmente de como elejamos o movimento de **K'.** Segundo a Teoria da Relatividade Geral, a lei geral do campo gravitacional deve verificar se para todos os campos gravitacionais assim obtidos. Ainda que desta maneira não se podem engendrar nem de longe todos os campos gravitacionais, cabe a esperança de poder deduzir destes campos de classe especial a lei geral da gravitação. E esta esperança se viu belissimamente cumprida! Mas desde que se vislumbrou claramente esta meta até que se chegou para valer a ela teve que superar uma séria dificuldade que não devo ocultar ao leitor, por estar arraigada na essência mesma do assunto. A questão requer aprofundar novamente nos conceitos do contínuo espaço-tempo.

[17] Isto se segue por generalização do raciocínio exposto em §20.

23. O COMPORTAMENTO DE RELÓGIOS E HASTES SOBRE UM CORPO DE REFERÊNCIA EM ROTAÇÃO

Até agora me abstive intencionadamente de falar da interpretação física de localizações espaciais e temporais no caso da Teoria da Relatividade Geral. Com isso me fiz culpado de um verdadeiro desalinho que, segundo sabemos pela Teoria da Relatividade Especial, não é em modo algum banal nem perdoável. Já é hora de preencher esta lacuna; mas advirto de antemão que o assunto demanda muita paciência e capacidade de abstração por parte do leitor. Partimos uma vez mais de casos muito especiais e muito socorridos. Imaginemos uma região espaço-temporal na qual, com respeito a um corpo de referência **K** que possua um estado de movimento convenientemente eleito, não exista nenhum campo gravitacional; em relação à região considerada, **K** é então um corpo de referência de Galileu, sendo válidos com respeito a ele os resultados da Teoria da Relatividade Especial. Imaginemos a mesma região, mas referida a um segundo corpo de referência **K'** que rompida uniformemente com respeito a **K**. Para fixar as idéias, suponhamos que **K'** é um disco circular que gira uniformemente ao redor de seu centro e em seu mesmo plano.

Um observador sentado em posição excêntrica sobre o disco circular **K'** experimenta uma força que atua em direção radial para afora e que outro observador que se ache em repouso com respeito ao corpo de referência original **K** interpreta como ação inercial (força centrífuga). Suponhamos, no entanto, que o observador sentado no disco considera este como um corpo de referência em repouso, para o qual está autorizado pelo Princípio de Relatividade. A força que atua sobre ele — e em geral sobre os corpos que se acham em repouso com respeito ao disco— a interpreta como a ação de um campo gravitacional. A distribuição espacial deste campo não seria possível segundo a teoria newtoniana da gravitação[18].

Mas como o observador acredita na Teoria da Relatividade Geral, não lhe preocupa este detalhe; espera, com razão, poder estabelecer uma lei geral da gravitação que explique corretamente não só o movimento dos astros, senão também o campo de forças que ele percebe. Este observador, instalado em seu disco circular, experimenta com relógios e hastes, com a intenção de obter, a partir do observado, definições exatas para o significado dos dados temporais e espaciais com respeito ao disco circular **K'**. Que experiências terá nessa tentativa? Imaginemos que o observador coloca primeiro dois relógios de idêntica constituição, Imaginemos que o observador coloca primeiro dois relógios de idêntica constituição, um no ponto médio do disco circular, o outro na periferia do mesmo, de maneira que ambos se acham em repouso com respeito ao disco. Em primeiro lugar nos perguntamos se estes dois relógios marcham ou não igual do ponto de vista do corpo de referência de Galileu **K**, que não rompida. Mensurado a partir de **K**, o relógio situado no centro não tem nenhuma velocidade, enquanto o

[18] O campo se anula no centro do disco e aumenta para fora proporcionalmente à distância no ponto médio

da periferia, devido à rotação com respeito a **K**, está em movimento. Segundo um resultado da seção12, este segundo relógio marchará constantemente mais devagar — com respeito a **K** — do que o relógio situado no centro do disco circular. O mesmo deveria evidentemente constatar o homem do disco, a quem vamos imaginar sentado no centro, junto ao relógio que há ali. Por conseguinte, em nosso disco circular, e com mais generalidade em qualquer campo gravitacional, os relógios marcharão mais depressa ou mais devagar segundo o lugar que ocupe o relógio (em repouso). Portanto, com ajuda de relógios colocados em repouso com respeito ao corpo de referência não é possível dar uma definição razoável do tempo. Análoga dificuldade se propõe ao tentar aplicar aqui nossa anterior definição de simultaneidade tema no qual não vamos nos aprofundar. Também a definição das coordenadas espaciais propõe aqui problemas que em princípio são insuperáveis.

Porque se o observador que se move junto com o disco coloca sua escala unidade (uma régua pequena, comparada com o raio do disco) tangencialmente sobre a periferia deste, seu comprimento, medida do sistema de Galileu será menor que 1, pois segundo a seção12 os corpos em movimento experimentam um encurtamento na direção do movimento. Se em mudança coloca a régua na direção do raio do disco, não terá encurtamento com respeito a **K**. Portanto, se o observador mede primeiro o perímetro do disco, depois seu diâmetro e divide estas duas medidas, obterá como quociente, não o conhecido número π = 3,14..., senão um número maior[19], enquanto num disco imóvel com respeito a **K** deveria resultar exatamente π nesta operação, como é natural. Com isso fica já provado que os teoremas da geometria euclidiana não podem verificar-se exatamente sobre o disco rotatório nem, em geral, num campo gravitacional, ao menos se se atribui à regüinha a comprimento 1 em qualquer posição e orientação. Também o conceito de linha reta perde com isso seu significado.

Não estamos, pois, em condições de definir exatamente as coordenadas ***x***, ***y***, ***z*** com respeito ao disco, utilizando o método empregado na Teoria da Relatividade especial. E enquanto as coordenadas e os tempos dos eventos não estejam definidos, também não têm significado exato as leis da natureza nas que aparecem essas coordenadas. Todas as considerações que fizemos anteriormente sobre a Relatividade Geral parecem ficar assim em tela de juízo. Em realidade faz defeituosa dar um sutil subterfúgio para aplicar exatamente o Postulado da Relatividade Geral. As seguintes considerações prepararão o leitor para este subterfúgio.

---

[19] Em todo este raciocínio há que utilizar o sistema de Galileu K (que não rompida) como corpo de coordenadas porque a validade dos resultados da Teoria da Relatividade Especial só cabe supô-la com respeito a K (em relação a K' existe um campo gravitacional).

24. O CONTÍNUO EUCLIDIANO E O NÃO EUCLIDIANO

Adiante de mim tenho a superfície de uma mesa de mármore. De qualquer ponto dela posso chegar até qualquer outro a custa de passar um número (grande) de vezes até um ponto vizinho, ou dito de outro modo, indo de um ponto a outro sem dar saltos. O leitor (sempre que não seja demasiado exigente) perceberá sem dúvida com suficiente precisão o que se entende aqui por vizinho e saltos. Isto o expressamos dizendo que a superfície é um contínuo. Imaginemos agora que fabricamos um grande número de varetas cujo tamanho seja pequeno comparado com as medidas da mesa, e todas elas de igual comprimento. Por último se entende que se podem encaixar os extremos de cada dois delas. Colocamos agora quatro destas varetas sobre a superfície da mesa, de maneira que seus extremos formem um quadrilátero cujas diagonais sejam iguais (quadrado). Para conseguir a igualdade das diagonais nos servimos de uma vareta de prova. Colados a este quadrado construímos outros iguais que tenham em comum com ele uma vareta; junto a estes últimos outros tantos, etc. Finalmente temos todo o tabuleiro coberto de quadrados, de tal maneira que cada lado interior pertence a dois quadrados e cada vértice interior, a quatro. O que se possa levar a cabo esta operação sem tropeçar com grandíssimas dificuldades é um verdadeiro milagre.

Basta com pensar no seguinte. Quando num vértice convergem três quadrados, estão já colocados dois lados do quarto, o qual determina totalmente a colocação dos dois lados restantes deste. Mas agora já não posso retocar o quadrilátero para igualar seus diagonais. Se o são de por si, será em virtude de um favor especial da mesa e das varetas, ante o qual me terei que mostrar maravilhado e agradecido. E para que a construção se consiga, temos que assistir a muitos milagres parecidos.

Se tudo foi realmente redondo, então digo que os pontos do tabuleiro formam um contínuo euclidiano com respeito à vareta utilizada como segmento. Se destaco um dos vértices da malha em qualidade de ponto de origem, qualquer outro poderei caracterizá-lo, com respeito ao ponto de origem, mediante dois números. Basta-me especificar quantas varetas para a direita e quantas depois para acima tenho que percorrer a partir da origem para chegar ao vértice em questão. Estes dois números são então as coordenadas cartesianas desse vértice com respeito ao sistema de coordenadas determinado pelas varetas colocadas. A seguinte modificação do experimento mental demonstra que também há casos que fracassa a tentativa. Suponhamos que as varetas se dilatam com a temperatura e que se esquenta o tabuleiro no centro mas não nas bordas. Segue sendo possível encaixar duas das varetas em qualquer lugar da mesa, mas nossa construção de quadrados ficará agora irremediavelmente desmontada, porque as varetas da parte interior da massa se dilatam, enquanto as da parte exterior, não.

Com respeito a nossas varetas — definidas como segmentos unidade — a mesa já não é um contínuo euclidiano, e também não estamos já em condições de definir diretamente com sua ajuda umas coordenadas cartesianas, porque não

podemos realizar a construção anterior. No entanto, como existem outros objetos sobre os quais a temperatura da mesa não influi da mesma maneira que sobre as varetas (ou sobre os quais nem sequer influi), é possível, sem forçar as coisas, manter ainda assim a idéia de que a mesa é um contínuo euclidiano, e é possível fazê-lo de modo satisfatório mediante uma constatação mais sutil a respeito da medição ou comparação de segmentos.

Agora , se todas as varetas, de qualquer classe ou material, mostrassem idêntico comportamento termosensível sobre a mesa irregularmente temperada, e se não tivéssemos outro meio de perceber a ação da temperatura que o comportamento geométrico das varetas em experimentos análogos ao antes descrito, então poderia ser conveniente discriminar dois pontos da mesa a distância **1** (**um**) quando fosse possível encaixar com eles os extremos de uma de nossas varetas; porque como definir se não o segmento, sem cair na mais crassa das arbitrariedades? Nesse caso há que abandonar, no entanto, o método das coordenadas cartesianas e substituí-lo por outro que não pressuponha a validade da geometria euclidiana[20]. O leitor advertirá que a situação aqui descrita corresponde com aquela que trouxe consigo o Postulado da Relatividade Geral (seção 23).

[20] Nosso problema se lhes propôs aos matemáticos da seguinte maneira: Dada uma superfície — por exemplo a de um elipsóide — no espaço de medida tridimensional euclidiano, existe sobre ela uma geometria bidimensional, exatamente igual que no plano. Gauss se propôs o problema de tratar teoricamente esta geometria bidimensional sem utilizar o fato de que a superfície pertence a um contínuo euclidiano de três dimensões. Se imaginamos que na superfície (igual que antes sobre a mesa) realizamos construções com varetas rígidas, as leis que valem para elas são diferentes das da geometria euclidiana do plano. A superfície não é, com respeito às varetas, um contínuo euclidiano, nem também não se podem defini coordenadas cartesianas na superfície. Gauss mostrou os princípios com arranjo aos quais se podem trataras condições geométricas na superfície, assinalando assim o caminho para o tratamento riemanniano de contínuos não euclidianos multidimensionais. Daí que os matemáticos tenham resolvidos desde faz muito os problemas formais a que conduz o postulado da relatividade geral.

25. COORDENADAS GAUSSIANAS

Este tratamento geométrico-analítico se pode conseguir, segundo Gauss, da seguinte maneira: Imaginemos desenhadas sobre o tabuleiro da mesa um sistema de curvas arbitrárias (veja-se Fig. 4), que chamamos curvas ou e a cada uma das quais caracterizamos com um número. Na figura estão desenhadas as curvas u = 1, u = 2 e u= 3. Mas entre as curvas **u = 1** e **u = 2** há que se imaginar desenhadas infinitas mais, correspondentes a todos os números reais que estão compreendidos entre **1** e **2**. Temos então um sistema de curvas ou que recobrem a mesa de maneira infinitamente densa. Nenhuma curva **u** corta a nenhuma outra, senão que por cada ponto da mesa passa uma curva e só uma. A cada ponto da superfície da mesa lhe corresponde então um valor ou perfeitamente determinado. Suponhamos também que sobre a superfície se desenhou um sistema de curvas **v** que satisfazem as mesmas condições, que estão caracterizadas de maneira análoga por números e que podem ter também uma forma arbitrária.

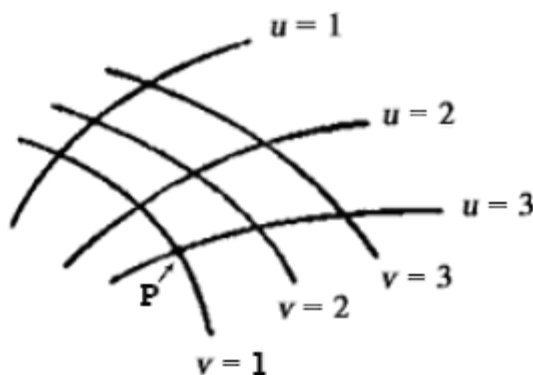



Fig. 16

A cada ponto da mesa lhe corresponde assim um valor **u** e um valor **v**, e a estes dois números os chamamos as coordenadas da mesa (coordenadas gaussianas). O ponto **P** da figura, por exemplo, tem como coordenadas gaussianas **u** = 3; **v** = 1. A dois pontos vizinhos **P** e **P'** da superfície lhes correspondem então as coordenadas

P : u; v
P' : u+*d*u; v+*d*v

onde ***d*u** e ***d*v** representam números muito pequenos. Seja ***d*s** um número também muito pequeno que representa a distância entre **P** e **P'** medida com uma regüinha **a**. Segundo Gauss temos então:

$$d^2=g_{11}ds^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}d^2$$

onde g_{11}, g_{12}, g_{22} são quantidades que dependem de maneira muito determinada de ***u*** e de ***v***.

As quantidades $\mathbf{g_{11}}$ **,** $\mathbf{g_{12}}$ **e** $\mathbf{g_{22}}$ determinam o comportamento das varetas com respeito às curvas **u** e **v**, e por tanto também com respeito à superfície da mesa. No caso de que os pontos da superfície considerada constituam com respeito às regüinhas de medida um contínuo euclidiano — e só nesse caso — será possível desenhar as curvas **u** e **v** e atribuir-lhes números de tal maneira que se cumpra singelamente

$$\mathbf{ds^2 = du^2 + dv^2}.$$

As curvas **u** e **v** são então linhas retas no sentido da geometria euclidiana, e perpendiculares entre si. e as coordenadas gaussianas serão singelamente coordenadas cartesianas. Como se vê, as coordenadas gaussianas não são mais do que uma atribuição de dois números a cada ponto da superfície considerada, de tal maneira que a pontos espacialmente vizinhos se lhes atribui valores numéricos que diferem muito pouco entre si.

Estas considerações valem em primeiro lugar para um contínuo de duas dimensões. Mas o método gaussiano se pode aplicar também a um contínuo de três,quatro ou mais. Com um contínuo de quatro dimensões, por exemplo, resulta a seguinte representação. A cada ponto do contínuo se lhe atribuem arbitrariamente quatro números $\mathbf{x_1, x_2, x_3, x_4}$ que se denominam coordenadas. Pontos vizinhos se correspondem com valores vizinhos das coordenadas.
Se a dois pontos vizinhos **P** e **P'** se lhes atribui uma distância ds fisicamente bem definida, susceptível de ser determinada mediante medições, então se cumpre a fórmula:

$$\mathbf{ds^2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 \bullet \bullet \bullet + g_{44}dx_4^2}$$

onde as quantidades g_{11}, etc. têm valores que variam com a posição no contínuo. Somente no caso de que o contínuo seja euclidiano será possível atribuir as coordenadas $\mathbf{x_1 ... x_4}$ aos pontos do contínuo de tal maneira que se cumpra simplesmente

$$\mathbf{ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}.$$

As relações que se cumprem então no contínuo quadridimensional são análogas às que regem em nossas medições tridimensionais. Assinalemos que a representação gaussiana para $\mathbf{ds^2}$ que acabamos de dar nem sempre é possível; só o é quando existam regiões suficientemente pequenas do contínuo em questão que caiba considerar como contínuos euclidianos. O qual se cumpre evidentemente no caso da mesa e da temperatura localmente variável, por exemplo porque numa porção pequena da mesa é praticamente constante a temperatura, e o comportamento geométrico das varetas é quase o que exigem as réguas da geometria euclidiana. Por conseguinte, as discordâncias na construção de quadrados da seção anterior não se manifestam claramente enquanto a operação não se estenda a uma parte importante da mesa.

Em resumo, podemos dizer: Gauss inventou um método para o tratamento de qualquer contínuo no que estejam definidas relações de medidas (distância entre pontos vizinhos).

A cada ponto do contínuo se lhe atribuem tantos números (coordenadas gaussianas) como dimensões tenha o contínuo. A atribuição se realiza de tal modo que se conserve a univocidade e de maneira que a pontos vizinhos lhes correspondam números (coordenadas gaussianas) que difiram infinitamente pouco entre si.

O sistema de coordenadas gaussianas é uma generalização lógica do sistema de coordenadas cartesianas.

Também é aplicável a contínuos não euclidianos, mas somente quando pequenas porções do contínuo considerado se comportem, com respeito à medida definida (distância), tanto mais euclidianamente quanto menor seja a parte do contínuo considerada.

26. O CONTÍNUO ESPAÇO-TEMPO DA TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL COMO CONTÍNUO EUCLIDIANO

Agora estamos em condições de formular com algo mais de precisão as idéias de Minkowski que esboçamos vagamente na seção17. Segundo a Teoria da Relatividade Especial, na descrição do contínuo espaço tempo quadridimensional gozam de privilégio certos sistemas de coordenadas que chamamos sistemas de coordenadas de Galileu. Para eles, as quatro coordenadas **x, y, z, t** que determinam um evento — ou expresso de outro modo, um ponto do contínuo quadridimensional — vêm definidas fisicamente de maneira muito simples, como já se explicou na primeira parte deste livro.
Para passar de um sistema de Galileu a outro que se mova uniformemente com respeito ao primeiro são válidas as equações da transformação de Lorentz, que constituem a base para derivar as conseqüências da Teoria da Relatividade Especial e que por sua vez não são mais do que a expressão da validade universal da lei de propagação da luz para todos os sistemas de referência de Galileu. Minkowski descobriu que as transformações de Lorentz satisfazem as singelas condições seguintes: Consideremos dois eventos vizinhos, cuja posição mútua no contínuo quadridimensional vinga dada pelas diferenças de coordenadas espaciais **dx, dy, dz** e a diferença temporal **dt** com respeito a um corpo de referência de Galileu **K**. Com respeito a um segundo sistema de Galileu, sejam **dx', dy', dz', dt'** as correspondentes diferenças para ambos eventos. Entre elas se cumpre então sempre a condição[21]:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2dt'^2.$$

Esta condição tem como conseqüência a validade da transformação de Lorentz. O qual podemos expressá-lo assim: a quantidade $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$ correspondente a dois pontos vizinhos do contínuo espaço-tempo quadridimensional, tem o mesmo valor para todos os corpos de referência privilegiados (de Galileu). Se substituirmos:

$$x, y, z, \sqrt{1-}\,ct$$

por **x1, x2, x3, x4**, obtém-se o resultado de que $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ é independente da eleição do corpo de referência. À quantidade **ds** a chamamos distância dos dois eventos ou pontos quadridimensionais. Por conseguinte, se se elege a variável imaginária

$$\sqrt{-1}\,ct$$

em lugar do t real como variável temporária, cabe interpretar o contínuo espaço temporal da Teoria da Relatividade especial como um contínuo quadridimensional euclidiano, como se desprende das considerações do último tópico.

[21] Cf. Apêndice. As relações (11a) e (12) deduzidas ali para as coordenadas valem também para diferenças de coordenadas, e por tanto para diferenciais das mesmas (diferenças infinitamente pequenas).

27. O CONTÍNUO ESPAÇO-TEMPO DA TEORIA DA RELATIVIDADE NÃO É UM CONTÍNUO EUCLIDIANO

Na primeira parte deste opúsculo nos pudemos servir de coordenadas espaço-temporais que permitiam uma interpretação física direta e simples e que, segundo a seção 26, podiam interpretar-se como coordenadas cartesianas quadridimensionais. Isto foi possível em virtude da lei da constância da velocidade da luz, lei que, no entanto, segundo seção 21, a Teoria da Relatividade Geral não pode manter; chegamos, pelo contrário, ao resultado de que segundo aquela a velocidade da luz depende sempre das coordenadas quando existe um campo gravitacional. Na seção 23 constatamos além do mais, num exemplo especial, que a existência de um campo gravitacional faz impossível essa definição das coordenadas e do tempo que nos conduziu à meta na Teoria da Relatividade Especial.

Tendo em conta estes resultados da reflexão, chegamos ao convencimento de que segundo o Princípio da Relatividade Geral, não cabe interpretar o contínuo espaço-tempo como um contínuo euclidiano, senão que nos achamos aqui ante o caso que vimos para o contínuo bidimensional da mesa com temperatura localmente variável. Bem, como era impossível construir ali um sistema de coordenadas cartesiano com varetas iguais, agora é também impossível construir, com ajuda de corpos rígidos e relógios, um sistema (corpo de referência) de maneira que escalas e relógios que sejam fixos uns com respeito a outros indiquem diretamente a posição e o tempo. Esta é em essência a dificuldade com que tropeçamos na seção 23.

No entanto, as considerações da seção 25 e seção 26 assinalam o caminho que temos que seguir para superá-la. Referimos de maneira arbitrária o contínuo espaço-tempo quadridimensional a coordenadas gaussianas. A cada ponto do contínuo (evento) atribuímos-lhe quatro números **x1, x2, x3, x4** (coordenadas) que não possuem nenhum significado físico imediato, senão que só servem para enumerar os pontos de uma maneira determinada, ainda que arbitrária. Esta correspondência não tem nem sequer que ser de tal caráter que obrigue a interpretar **x1, x2, x3** como coordenadas espaciais e **x4** como coordenada temporal.

O leitor quiçá pense que semelhante descrição do mundo é absolutamente insatisfatória. Que significa atribuir a um acontecimento umas determinadas coordenadas **x1, x2, x3, x4** que em si não significam nada? Uma reflexão mais atenta demonstra, no entanto, que a preocupação é infundada. Contemplemos, por exemplo, um ponto material de movimento arbitrário. Se este ponto tivesse só uma existência momentânea, sem duração, então viria descrito espaço-temporariamente através de um sistema de valores único **x1, x2, x3, x4** . Sua existência permanente vem, portanto, caracterizada por um número infinitamente grande de semelhantes sistemas de valores, em onde as coordenadas se

encadeiam ininterruptamente; no ponto material lhe corresponde, portanto, uma linha (unidimensional) no contínuo quadridimensional. E a uma multidão de pontos móveis lhes correspondem outras tantas linhas em nosso contínuo.

De todos os enunciados que se ateiem a estes pontos, os únicos que podem aspirar a realidade física são aqueles que versam sobre encontros destes pontos. No marco de nossa representação matemática, um encontro desta espécies se traduz no fato de que as duas linhas que representam os correspondentes movimentos dos pontos têm em comum um determinado sistema **x1, x2, x3, x4** de valores das coordenadas. Que semelhantes encontros são em realidade as únicas constatações reais de caráter espaço-temporal que encontramos nas proposições físicas é algo que o leitor admitirá sem dúvida depois de pausada reflexão.

Quando antes descrevíamos o movimento de um ponto material com respeito a um corpo de referência, não especificávamos outra coisa que os encontros deste ponto com determinados pontos do corpo de referência. Inclusive as correspondentes especificações temporárias se reduzem a constatar encontros do corpo com relógios,junto com a constatação do encontro dos ponteiros do relógio com determinados pontos da esfera. E o mesmo ocorre com as medições espaciais com ajuda de escalas como se verá a pouco que se reflexione. Em geral, cumpre-se o seguinte: toda descrição física se reduz a uma série de proposições cada uma das quais se refere à coincidência espaço-temporal de dois eventos **A** e **B**. Cada uma destas proposições se expressa em coordenadas gaussianas mediante a coincidência das quatro coordenadas **x1, x2, x3, x4**. Portanto, é verdadeiro que a descrição do contínuo espaço-tempo através de coordenadas gaussianas substitui totalmente à descrição com ajuda de um corpo de referência, sem acrescer dos defeitos deste último método, pois não está unido ao caráter euclidiano do contínuo a representar.

28. FORMULAÇÃO EXATA DO PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE GERAL

Agora estamos em condições de substituir a formulação provisória do Princípio da Relatividade Geral que demos na seção 18 por outra que é exata. A versão de então —Todos os corpos de referência **K, K'**, etc., são equivalentes para a descrição da natureza (formulação das leis gerais da natureza), seja qual for seu estado de movimento — é insustentável, porque em geral não é possível utilizar corpos de referência rígidos na descrição espaço-temporal no sentido do método seguido na Teoria da Relatividade Especial. Em lugar do corpo de referência tem que aparecer o sistema de coordenadas gaussianas. A idéia fundamental do Princípio da Relatividade Geral responde ao enunciado: Todos os sistemas de coordenadas gaussianas são essencialmente equivalentes para a formulação das leis gerais da natureza.

Este Princípio da Relatividade Geral cabe enunciá-lo em outra forma que permite reconhecê-lo ainda mais claramente como uma extensão natural do Princípio da Relatividade Especial. Segundo a Teoria da Relatividade Especial, ao substituir as variáveis espaço-temporais **x, y, z, t** de um corpo de referência **K** (de Galileu) pelas variáveis espaço-temporais **x', y', z', t'** de um novo corpo de referência **K'** utilizando a transformação de Lorentz, as equações que expressam as leis gerais da natureza se convertem em outras da mesma forma. Pelo contrário, segundo a Teoria da Relatividade Geral, as equações têm que se transformar em outras da mesma forma ao fazer quaisquer substituições das variáveis gaussianas **x1, x2, x3, x4**; pois toda substituição (e não só a da transformação de Lorentz) corresponde ao passo de um sistema de coordenadas gaussianas a outro. Se não se quer renunciar à habitual representação tridimensional, podemos caracterizar como segue a evolução que vemos experimentar à idéia fundamental da Teoria da Relatividade Geral: a Teoria da Relatividade Especial se refere a regiões de Galileu, isto é, aquelas nas que não existe nenhum campo gravitacional. Como corpo de referência atua aqui um corpo de referência de Galileu, isto é, um corpo rígido cujo estado de movimento é tal que com respeito a ele é válido o princípio de Galileu do movimento retilíneo e uniforme de pontos materiais isolados.

Certas considerações sugerem referir essas mesmas regiões de Galileu a corpos de referência não galileanos também. Com respeito a estes existe então um campo gravitacional de tipo especial (seção 20 e seção 23). No entanto, nos campos gravitacionais não existem corpos rígidos com propriedades euclidianas; a ficção do corpo de referência rígido fracassa, pois, na Teoria da Relatividade Geral. E os campos gravitacionais também influem na marcha dos relógios até o ponto de que uma definição física do tempo com a ajuda direta de relógios não possui nem muito menos o grau de evidência que tem na Teoria da Relatividade Especial.

Por essa razão se utilizam corpos de referência não rígidos que, vistos como um todo, não só têm um movimento arbitrário, senão que durante seu movimento sofrem alterações arbitrárias em sua forma.

Para a definição do tempo servem relógios cuja marcha obedeça a uma lei arbitrária e tão irregular quanto se queira; cada um destes relógios há que imaginar-se fixo num ponto do corpo de referência não rígido, e cumprem uma só condição: a de que os dados simultaneamente perceptíveis em relógios espacialmente vizinhos difiram infinitamente pouco entre si.

Este corpo de referência não rígido, que não sem razão caberia chamá-lo molusco de referência, equivale em essência a um sistema de coordenadas gaussianas, quadridimensional e arbitrário. O que lhe confere ao molusco um verdadeiro atrativo frente ao sistema de coordenadas gaussianas é a conservação formal (em realidade injustificada) da peculiar existência das coordenadas espaciais frente à coordenada temporária.

Todo ponto do molusco é tratado como um ponto espacial; todo ponto material que esteja em repouso com respeito a ele será tratado como em repouso, a secas, enquanto se utilize o molusco como corpo de referência. O Princípio da Relatividade Geral exige que todos estes moluscos se possam empregar, com igual direito e sucesso parelho, como corpos de referência na formulação das leis gerais da natureza; estas leis devem ser totalmente independentes da eleição do molusco.

Na profunda restrição que se impõe com isso às leis da natureza reside a sagacidade que lhe é inerente ao Princípio da Relatividade Geral.

29. A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DA GRAVITAÇÃO SOBRE A BASE DO PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE GERAL

Se o leitor seguiu todos os raciocínios anteriores, não terá dificuldade nenhuma para compreender os métodos que conduzem à solução do problema da gravitação. Partimos da contemplação de uma região de Galileu, isto é, de uma região na qual não existe nenhum campo gravitacional com respeito a um corpo de referência de Galileu **K**. O comportamento de réguas e relógios com respeito a **K** é já conhecido pela Teoria da Relatividade Especial, o mesmo que o comportamento de pontos materiais isolados; estes últimos se movem em linha reta e uniformemente. Referimos agora esta região a um sistema de coordenadas gaussiano arbitrário, ou bem a um molusco, como corpo de referência **K'**. Com respeito a **K'** existe então um campo gravitacional **G** (de classe especial). Por simples conversão se obtém assim o comportamento de réguas e relógios, bem como de pontos materiais livremente móveis, com respeito a **K'**. Este comportamento se interpreta como o comportamento de réguas, relógios e pontos materiais sob a ação do campo gravitacional **G**. Introduz-se então a hipótese de que a ação do campo gravitacional envelope réguas, relógios e pontos materiais livremente móveis se produz segundo as mesmas leis ainda no caso de que o campo gravitacional reinante não se possa derivar do caso especial galileano por mera transformação de coordenadas. A seguir pesquisa-se o comportamento espaço-temporal do campo gravitacional **G** derivado do caso especial galileano por simples transformação de coordenadas e se formula este comportamento mediante uma lei que é válida independentemente de como se eleja o corpo de referência (molusco) utilizado para a descrição.

Esta lei não é ainda a lei geral do campo gravitacional, porque o campo gravitacional **G** estudado é de uma classe especial. Para achar a lei geral do campo gravitacional faz falta generalizar além disso a lei assim obtida; não obstante, cabe encontrá-la, sem nenhum gênero de arbitrariedade, se se têm em conta os seguintes requisitos:

a) A generalização procurada deve satisfazer também o Postulado da Relatividade Geral.
b) Se existe matéria na região considerada, então o único que determina sua ação geradora de um campo é sua massa inercial, isto é, segundo seção 15, sua energia unicamente.
c) Campo gravitacional e matéria devem satisfazer juntos a lei de conservação da energia (e do impulso). O princípio da Relatividade Geral nos permite por fim determinar a influência do campo gravitacional sobre a evolução de todos aqueles processos que em ausência de campo gravitacional discorrem segundo leis conhecidas, isto é, que estão incluídos já no marco da Teoria da Relatividade Especial. Aqui se procede essencialmente pelo método que antes analisamos para réguas, relógios e pontos materiais livremente móveis.

A teoria da gravitação derivada assim do Postulado da Relatividade Geral não só sobressai por sua beleza, nem elimina o defeito indicado na seção 21 do qual padece a Mecânica Clássica, nem interpreta a lei empírica da igualdade entre massa inercial e massa gravitacional, mas já explicou também dois resultados experimentais da astronomia, essencialmente muito diferentes, frente aos quais fracassa a Mecânica Clássica. O segundo destes resultados, a curvatura dos raios luminosos no campo gravitacional do Sol, já o mencionamos; o primeiro tem que ver com a órbita do planeta Mercúrio.

Efetivamente, se se particularizam as equações da Teoria da Relatividade Geral no caso de que os campos gravitacionais sejam débeis e de que todas as massas se movam com respeito ao sistema de coordenadas com velocidades pequenas comparadas com a da luz então se obtém a teoria de Newton como primeira aproximação; por conseguinte, esta teoria resulta aqui sem necessidade de postular nenhuma hipótese especial, enquanto Newton teve que introduzir como hipótese a força de atração inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os pontos materiais que interatuam. Se se aumenta a exatidão do cálculo, aparecem desvios com respeito à teoria de Newton quase todas as quais são, no entanto, ainda demasiado pequenas para ser observáveis. Um destes desvios devemos examiná-lo aqui com especial atenção. Segundo a Teoria Newtoniana, os planetas se movem em torno do Sol segundo uma elipse que conservaria eternamente sua posição com respeito às estrelas fixas se se pudesse prescindir da influência dos demais planetas sobre o planeta considerado, bem como do movimento próprio das estrelas fixas.

Fora destas duas influências, a órbita do planeta deveria ser uma elipse imutável com respeito às estrelas fixas, sempre que a teoria de Newton fosse exatamente correta. Em todos os planetas, menos em Mercúrio, o mais próximo do Sol, confirmou-se esta conseqüência — que se pode comprovar com eminente precisão — até o limite de exatidão que permitem os métodos de observação atuais. Agora , do planeta Mercúrio sabemos desde Leverrier que a elipse de sua órbita com respeito às estrelas fixas, uma vez corrigida no sentido anterior, não é fixa, senão que rompida — ainda que lentissimamente — no plano orbital e no sentido de sua revolução. Para este movimento de rotação da elipse orbital se obteve um valor de 43 segundos de arco por século, valor que é seguro com uma imprecisão de poucos segundos de arco. A explicação deste fenômeno dentro da Mecânica Clássica só é possível mediante a utilização de hipótese pouco verossímeis, inventadas exclusivamente com este propósito.

Segundo a Teoria da Relatividade Geral resulta que toda elipse planetária ao redor do Sol deve necessariamente rotar no sentido indicado anteriormente, que esta rotação é em todos os planetas, menos em Mercúrio, demasiado pequena para poder detectá-la com a exatidão de observação hoje em dia alcançável, mas que no caso de Mercúrio deve ascender a 43 segundos de arco por século, exatamente como se tinha comprovado nas observações. À margem disto, só se pôde extrair da teoria outra conseqüência acessível à constatação experimental, e é um deslocamento, espectral da luz que nos enviam as grandes estrelas com respeito à luz gerada de maneira equivalente (isto é, pela mesma classe de moléculas) na Terra. Não me cabe nenhuma dúvida de que também esta conseqüência da teoria achará em breve sua confirmação.

CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO UNIVERSO COMO UM TODO

30. DIFICULDADES COSMOLÓGICAS DA TEORIA NEWTONIANA

Aparte do problema exposto na seção 21, a Mecânica Celeste Clássica padece de uma segunda dificuldade teórica que, segundo meus conhecimentos, foi examinada detidamente pela primeira vez pelo astrônomo Seeliger. Se alguém reflexiona sobre a pergunta de como imaginar o mundo como um todo, a resposta imediata será seguramente a seguinte: O Universo é espacialmente (e temporalmente) infinito. Existem estrelas por todos os lados, de maneira que a densidade de matéria será em pontos particulares muito diversa, mas em todas partes a mesma por meio-termo. Expresso de outro modo: por muito que se viagem pelo Universo, em todas partes se achará um enxame solto de estrelas fixas de aproximadamente a mesma espécie e igual densidade. Esta concepção é irreconciliável com a Teoria Newtoniana. Esta última exige bem mais do que o Universo tenha uma espécie de centro no qual a densidade de estrelas seja máxima, e que a densidade de estrelas diminua de ali para fora, deve diminuir, até finalmente, em distâncias grandes, ser sucedida por uma região infinita de vazio. O mundo estelar deveria formar uma ilha finita no meio do infinito oceano do espaço[22]. Esta representação é de por si pouco satisfatória. Mas o é ainda menos porque deste modo se chega à conseqüência de que a luz emitida pelas estrelas, bem como algumas das estrelas mesmas do sistema estelar, emigram ininterruptamente para o infinito, sem que jamais regressem nem voltem a entrar em interação com outros objetos da natureza. O mundo da matéria, aglomerada num espaço finito, iria empobrecendo-se então paulatinamente. Para evitar com destreza estas conseqüências Seeliger modificou a lei newtoniana no sentido de supor que a distâncias grandes a atração de duas massas diminui mais rápido que a lei de

$$\frac{1}{r^2}$$

Com isso se consegue que a densidade média da matéria seja constante em todas partes até o infinito, sem que surjam campos gravitacionais infinitamente grandes, com o qual se desfaz uma antipática idéia de que o mundo material possui uma espécie de ponto médio. No entanto, o preço que se paga por liberar-se dos problemas teóricos descritos é uma modificação e complicação da lei de Newton que não se justificam nem experimental nem teoricamente. Cabe imaginar um número arbitrário de leis que obedeçam o mesmo propósito, sem que se possa dar nenhuma razão para que uma delas prime sobre as demais; porque qualquer delas está tão pouco fundada em princípios teóricos mais gerais como a lei de Newton.

---

[22] Justificativa. Segundo a teoria newtoniana, numa massa m vão morrer uma verdadeira quantidade de linhas de força que provém do infinito e cujo número é proporcional à massa **m**. Se a densidade de massa ρ_0 no universo é a meio-termo constante, então uma esfera de volume **V** encerra a meio-termo a massa $\rho_0 V$. O número de linhas de força que entram através da superfície **F** no interior da esfera é, por tanto, proporcional a $\rho_0 V$. Por unidade de superfície da esfera entra um número de linhas de força que é proporcional a

$$\rho_0 \frac{V}{F} \text{ o } \rho_0 R$$

a intensidade do campo na superfície tenderia a infinito ao crescer o raio da esfera **R**, o qual é impossível.

31. A POSSIBILIDADE DE UM UNIVERSO FINITO E NO ENTANTO NÃO LIMITADO

As especulações em torno da estrutura do Universo se moveram também em outra direção muito diferente. Efetivamente, o desenvolvimento da Geometria não Euclidiana fez ver que é possível duvidar da infinitude de nosso espaço sem entrar em colisão com as leis do pensamento nem com a experiência (Riemann, Helmholtz). Helmholtz e Poincaré já aclararam estas questões com todo detalhe, enquanto aqui eu não posso fazer mais que as tocar fugazmente. Imaginemos em primeiro lugar um acontecimento bidimensional. Suponhamos que uns seres planos, providos de ferramentas planas — em particular pequenas hastes planas e rígidas — podendo moverem-se livremente num plano. Fora dele não existe nada para eles; o evento em seu plano, que eles observam em si mesmos e em seus objetos, é um evento causalmente fechado. Em particular são realizáveis as construções da geometria euclidiana plana com varetas, por exemplo a construção reticular sobre a mesa que contemplamos na seção 24. O mundo destes seres é, em contraposição ao nosso, espacialmente bidimensional, mas, igual ao nosso, de extensão infinita. Nele existe infinitos quadrados iguais construídos com varetas, isto é, seu volume (superfície) é infinito. Se estes seres dizem que seu mundo é plano, não deixará de fazer sentido sua afirmação, a saber, o sentido de que com suas varetas se podem realizar as construções da geometria euclidiana do plano, representando cada vareta sempre o mesmo segmento, independentemente de sua posição. Voltemos agora a imaginar-nos um evento bidimensional, mas não num plano, numa superfície esférica. Os seres planos, junto com suas réguas de medida e restantes objetos, jazem exatamente nesta superfície e não podem abandoná-la; todo seu mundo perceptivo se estende única e exclusivamente à superfície esférica. Estes seres poderão dizer que a geometria de seu mundo é uma geometria euclidiana bidimensional e considerar que suas varetas são uma realização do segmento? Não podem, porque ao tentar materializar uma reta obterão uma curva, que nós, seres tridimensionais, chamamos círculo máximo, isto é, uma linha fechada de determinada comprimento finita que se pode medir com uma vareta. Este mundo tem assim mesmo uma superfície finita que se pode comparar com a de um quadrado construído com varetas.

O grande encanto que depara o submergir-se nesta reflexão reside em se aperceber do seguinte: **o mundo destes seres é finito e no entanto não tem limites.** Agora , os seres esféricos não precisam empreender uma viagem pelo mundo para advertir que não habitam num mundo euclidiano, do qual podem convencer-se em qualquer bocado não demasiado pequeno da esfera. Basta apenas que, desde um ponto, tracem segmentos retos (arcos de circunferência, se o julgamos tridimensionalmente) de igual comprimento em todas direções. A união dos extremos livres destes segmentos a chamarão circunferência.
A razão entre o perímetro da circunferência medido com uma vareta, e o diâmetro medido com a mesma vareta tanto faz, segundo a geometria euclidiana do plano, a uma constante π que é independente do diâmetro da circunferência.

Sobre a superfície esférica, nossos seres achariam para esta razão o valor

$$\pi \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{r}{R}\right)}{\left(\frac{r}{R}\right)}$$

isto é, um valor que é menor que π, e tanto menor quanto maior seja o raio da circunferência em comparação com o raio **R** do mundo esférico. A partir desta relação podem determinar os seres esféricos o raio **R** de seu mundo, ainda que só tenham a sua disposição uma parte relativamente pequena da esfera para fazer suas medições. Mas se essa parte é demasiado reduzida, já não poderão constatar que se acham sobre um mundo esférico e não sobre um plano euclidiano, porque um bocado pequeno de uma superfície esférica difere pouco de um bocado de plano de igual tamanho.

Por conseguinte, se nossos seres esféricos habitam num planeta cujo sistema solar ocupa só uma parte minúscula do Universo esférico, não terão possibilidade de decidir se vivem num mundo finito ou infinito, porque o bocado de mundo que é acessível a sua experiência é em ambos casos praticamente plano ou euclidiano. Esta reflexão mostra diretamente que para nossos seres esféricos o perímetro da circunferência cresce, em princípio, com o raio até atingir o perímetro do Universo, para depois, ao seguir, diminuir paulatinamente até zero. A superfície do círculo cresce continuamente, até fazer-se finalmente igual à superfície total do mundo esférico inteiro. Ao leitor quiçá lhe estranhe que tenhamos colocado a nossos seres precisamente sobre uma esfera e não sobre outra superfície fechada. Mas tem sua justificativa, porque a superfície esférica se caracteriza, frente a todas as demais superfícies fechadas, pela propriedade de que todos seus pontos são equivalentes. É verdade que a relação entre o perímetro **p** de uma circunferência e seu raio **r** depende de **r**; mas, dado **r**, tanto faz para todos os pontos do mundo esférico. O mundo esférico é uma superfície de curvatura constante.

Este mundo esférico bidimensional tem seu homólogo em três dimensões, o espaço esférico tridimensional, que foi descoberto por Riemann. Seus pontos são também equivalentes. Possui um volume finito, que vem determinado por seu raio $\mathbf{R(2\pi^2R^3)}$. Pode imaginar-se um espaço esférico? Imaginar-se um espaço não quer dizer outra coisa que se imaginar um modelo de experiências espaciais, isto é, de experiências que se podem ter com o movimento de corpos rígidos. Neste sentido sim, cabe imaginar um espaço esférico.

De um ponto traçamos retas (tensionamos cordas) em todas direções e marcamos em cada uma o segmento **r** com ajuda da régua de medir. Todos os extremos livres destes segmentos jazem sobre uma superfície esférica. Sua área (**A**) podemos medi-la com um quadrado feito com hastes. Se o mundo é euclidiano, teremos que $\mathbf{A = 4\pi r^2}$; se o mundo é esférico, então **A** será sempre menor que $\mathbf{4\pi r^2}$. **A** aumenta com **r** de zero até um máximo que vem determinado pelo raio do Universo, para depois diminuir outra vez até zero ao seguir crescendo o raio da

esfera **r**. As retas radiais que saem do ponto origem se afastam a princípio cada vez mais umas de outras, voltam a acercar-se depois e convergem outra vez no ponto oposto à origem; terão percorrido então todo o espaço esférico. É fácil comprovar que o espaço esférico tridimensional é totalmente análogo ao bidimensional (superfície esférica). É finito (isto é, de volume finito) e não tem limites.

Assinalemos que existe também uma subespécie do espaço esférico: o espaço elíptico. Cabe concebê-lo como um espaço esférico no que os pontos opostos são idênticos (não distinguíveis). Por conseguinte, um mundo elíptico cabe contemplá-lo, em certo modo, como um mundo esférico centralmente simétrico. Do afirmado se depreende que é possível imaginar espaços fechados que não tenham limites. Entre eles destaca por sua simplicidade o espaço esférico (ou o elíptico), cujos pontos são todos equivalentes. Segundo tudo o anterior, se lhes propõe aos astrônomos e aos físicos um problema altamente interessante, o de se o mundo em que vivemos é infinito ou, ao estilo do mundo esférico, finito.

Nossa experiência não basta nem de longe para contestar a esta pergunta.

A Teoria da Relatividade Geral permite, no entanto, responder com bastante segurança e resolver de passagem a dificuldade explicada na seção 30.

32. A ESTRUTURA DO ESPAÇO SEGUNDO A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Segundo a Teoria da Relatividade Geral, as propriedades geométricas do espaço não são independentes, senão que vêm condicionadas pela matéria. Por isso não é possível inferir nada sobre a estrutura geométrica do mundo a não ser que a reflexão se funde no conhecimento do estado da matéria. Sabemos, pela experiência, que com uma eleição conveniente do sistema de coordenadas as velocidades das estrelas são pequenas frente à velocidade de propagação da luz. Por conseguinte, se supomos que a matéria está em repouso, poderemos conhecer a estrutura do Universo numa primeira e muitíssimo tosca aproximação.
Por considerações anteriores sabemos que o comportamento de réguas de medir e relógios são influenciados pelos campos gravitacionais, isto é, pela distribuição da matéria. Daqui se segue que a validade exata da geometria euclidiana em nosso mundo é algo que não entra nem sequer em consideração. Mas em si é concebível que nosso mundo difira pouco de um mundo euclidiano, idéia que vem abonada pelo fato de que, segundo os cálculos, inclusive massas da magnitude de nosso Sol influem minimamente na métrica do espaço circundante. Caberia imaginar que nosso mundo se comporta no aspecto geométrico como uma superfície que está irregularmente curvada mas que em nenhum ponto se aparta significativamente de um plano, o mesmo que ocorre, por exemplo, com a superfície de um lago encaracolado por débeis ondas. A um mundo desta espécie poderíamos chamá-lo com propriedade quase-euclidiano, e seria espacialmente infinito. Os cálculos indicam, no entanto, que num mundo quase-euclidiano a densidade média de matéria teria que ser nula. Portanto, um mundo semelhante não poderia estar povoado de matéria por todos os lados; ofereceria o quadro insatisfatório que desenhamos na seção 30.
Se a densidade média de matéria no mundo não é nula (ainda que se acerque muito a zero), então o mundo não é quase-euclidiano. Os cálculos demonstram melhor que, com uma distribuição uniforme de matéria, deveria ser necessariamente esférico (ou elíptico). Dado que a matéria está distribuída de maneira localmente não uniforme, o mundo real diferirá localmente do comportamento esférico, isto é, será quase-esférico. Mas necessariamente terá que ser finito. A teoria proporciona inclusive uma singela relação entre a extensão espacial do mundo e a densidade média de matéria em ele[23].

---

[23] Para o “raio” **R** do mundo se obtém a equação

$$R^2 = \frac{2}{x\rho}$$

Utilizando o sistema cgs, temos que **2/x** = 1,08 • 10^{27} ; **ρ** é a densidade média de matéria.

APÊNDICE

1 UMA DERIVAÇÃO SINGELA DA TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

Com a orientação relativa dos sistemas de coordenadas indicada na Fig. 2, os eixos de abscissas dos dois sistemas coincidem constantemente. Aqui podemos decompor o problema e considerar primeiro unicamente eventos que estejam localizados no eixo dos **X**. Um acontecimento semelhante vem dado, com respeito ao sistema de coordenadas **K**, pela abscissa **x** e o tempo **t**, e com respeito a **K'** pela abscissa **x'** e o tempo **t'**. Trata-se de achar **x'** e **t'** quando se conhecem **x** e **t**. Um sinal luminoso que avança ao longo do eixo **X** positivo se propaga segundo a equação

$$x = ct$$

ou bem

$$x - ct = 0 \quad (1)$$

Dado que o mesmo sinal luminoso deve propagar-se, também com respeito a **K'**, com a velocidade ***c***, a propagação com respeito a **K'** virá descrita pela fórmula análoga

$$x' - ct' = 0 \quad (2)$$

Aqueles pontos do espaço-tempo (eventos) que cumprem (1) têm que verificar também (2), o qual será o caso quando se cumpra em geral a relação

$$(x' - ct') = \lambda(x - ct) \qquad (3)$$

onde **λ** é uma constante; pois, segundo (**3**), a anulação de $x - ct$ implica a de $x' - ct'$. Um raciocínio totalmente análogo, aplicado a raios de luz que se propaguem ao longo do eixo **X** negativo, proporciona a condição:

$$x' + ct' = \mu (x + ct) \quad (4)$$

Se se somam e restam, respectivamente, as equações (**3**) e (**4**), introduzindo por razões de comodidade as constantes

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

$$b = \frac{\lambda - \mu}{2}$$

em lugar das constantes **λ** e **μ**, obtém-se:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax - bct \\ ct' &= act - bx \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Com isso ficaria resolvido o problema, sempre que conheçamos as constantes **a** e **b**; estas resultam das seguintes considerações. Para a origem de **K'** se cumpre constantemente $x' = 0$ de maneira que, pela primeira das equações (**5**):

$$x = \frac{bc}{a} t$$

Portanto, se chamamos **v** à velocidade com que se move a origem de **K'** com respeito a **K**, temos que:

$$v = \frac{bc}{a} \qquad (6)$$

O mesmo valor de **v** se obtém a partir de (**5**), ao calcular a velocidade de outro ponto de **K'** com respeito a **K** ou a velocidade (dirigida para o eixo **X** negativo) de um ponto **K** com respeito a **K'**. Por tanto, é possível dizer em resumo que **v** é a velocidade relativa de ambos sistemas. Além do mais, pelo Princípio da Relatividade, está claro que o comprimento, medido desde **K**, de uma haste de medir unitária que se acha em repouso com respeito a **K'** tem que ser exatamente o mesmo que o comprimento, avaliado desde **K'**, de uma régua unidade que se ache em repouso com respeito a **K**. Para ver que aspecto têm os pontos do eixo **X'** vistos desde **K** basta tomar uma fotografia instantânea de **K'** desde **K**; o qual significa dar a **t** (tempo de **K**) um valor determinado, p. ex. **t = 0.** Da primeira das equações (**5**) obtém-se:

$$x' = ax.$$

Por conseguinte, dois pontos do eixo **X'** que medidos em **K'** distam entre si **x' = 1**, têm em nossa instantânea a separação:

$$\Delta x = \frac{1}{a} \qquad (7)$$

Mas se se toma a fotografia desde **K' (t' = 0)**, obtém-se a partir de (**5**), por eliminação de **t** e tendo em conta (**6**):

$$x' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)x.$$

De aqui se deduz que dois pontos do eixo X que distam **1** (com respeito a **K**) têm em nossa instantânea a separação

$$\Delta x' = a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (7a)$$

Tendo em conta que, pelo que havíamos dito, as duas fotografias devem ser iguais, **Δx** em (**7**) tem que ser igual a **Δx'** em (**7a**), de maneira que se obtém:

$$a^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (7b)$$

As equações (**6**) e (**7b**) determinam as constantes **a** e **b**. Substituindo em (**5**) obtêm-se as equações quarta e quinta das que demos na seção 11.

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (8)$$

Com isso obtivemos a transformação de Lorentz para eventos localizados no eixo **X**; tal transformação satisfaz a condição

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2 \qquad \textbf{(8a)}$$

extensão deste resultado a eventos que ocorrem fora do eixo **X** se obtém retendo as equações (**8**) e adicionando as relações

$$\left.\begin{array}{l} y' = y \\ z' = z \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Vejamos agora que com isso se satisfaz o postulado da constância da velocidade da luz para raios luminosos de direção arbitrária, tanto para o sistema **K** como também para o **K'**. Suponhamos que no instante **t = 0** se emite um sinal luminoso desde a origem de **K**. Sua propagação obedece à equação:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = ct$$

ou bem, elevando ao quadrado

$$x^2+y^2+z^2 - c^2t^2 = 0 \quad (10)$$

A lei de propagação da luz, em conjunção com o postulado da Relatividade, exige que a propagação desse mesmo sinal, mas medida desde **K**', ocorra segundo a fórmula correspondente

$$r' = ct'$$

ou bem,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \quad (10a)$$

Para que a equação **(10a)** seja uma conseqüência de **(10)**, tem que verificar-se que:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \sigma \; x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \quad (11)$$

Já que a equação **(8a)** tem que se verificar para os pontos situados sobre o eixo **X**, tem de ser **σ = 1.** É fácil ver que a transformação de Lorentz cumpre realmente a equação **(11)** com **σ = 1**, pois **(11)** é uma conseqüência de **(8a)** e **(9)**, e portanto

também de **(8)** e **(9)**. Com isso fica derivada a transformação de Lorentz. É preciso agora generalizar esta transformação de Lorentz, representada por **(8)** e **(9)**. Evidentemente é não essencial que os eixos de **K'** se elejam espacialmente paralelos aos de **K**. Também não é essencial que a velocidade de translação de **K'** com respeito a **K** tenha a direção do eixo **X**. A transformação de Lorentz, neste sentido geral, cabe decompô-la — como mostra um simples raciocínio — em duas transformações, a saber: transformações de Lorentz em sentido especial e transformações puramente espaciais que equivalem à substituição do sistema de coordenadas retangulares por outro com eixos dirigidos em direções diferentes. Matematicamente se pode caracterizar a transformação de Lorentz generalizada da seguinte maneira: tal transformação expressa **x', y', z', t'** mediante umas funções homogêneas e lineares de **x, y, z, t** que fazem que a relação

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \quad \textbf{(11a)}$$

se verifique identicamente. O que quer dizer: se se substitui o lado esquerdo **x'**, etc. por suas expressões em **x, y, z, t,** então o membro esquerdo de **(11a)** tanto faz ao lado direito.

2. O MUNDO QUADRIDIMENSIONAL DE MINKOWSKI (ANEXO A 17)

A transformação de Lorentz generalizada pode caracterizar-se de um modo ainda mais singelo se em lugar de **t** se introduz como variável temporal a variável imaginária

$\sqrt{-1}ct$ Se de acordo com isto pomos

$$x1 = x$$
$$x2 = y$$
$$x3 = z$$
$$x4 = \sqrt{-1}ct$$

e analogamente para o sistema com primas **K'**, então a condição que satisfaz identicamente a transformação será:

$$x'_1+x'_2+x'_3+x'_4 = x_1+x_2+x_3+x_4 \quad \textbf{(12)}$$

Com a eleição de coordenadas que acabamos de indicar, a equação **(11a)** converte-se na **(12).** De **(12)** desprende-se que a coordenada temporal imaginário **x4** entra na condição de transformação em pé de igualdade com as coordenadas espaciais **x1, x2, x3**. A isso responde o que, segundo a Teoria da Relatividade, o tempo **x4** intervenha nas leis da natureza na mesma forma que as coordenadas espaciais **x1, x2, x3** Minkowski chamou Universo ou mundo ao contínuo quadridimensional descrito pelas coordenadas **x1, x2, x3, x4**, e ponto do Universo ou ponto do mundo ao acontecimento pontual. A física deixa de ser um suceder no espaço tridimensional para converter-se em certo modo num ser no mundo quadridimensional.

Este mundo quadridimensional guarda um profundo parecido com o espaço tridimensional da geometria analítica (euclidiana). Pois se neste último se introduz um novo sistema de coordenadas cartesianas (**x'1, x'2, x'3**) com a mesma origem, então **x'1, x'2, x'3** são funções homogêneas e lineares de **x1, x2, x3** que cumprem identicamente a equação

$$x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2 = x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2$$

A analogia com (**12**) é completa. O mundo de Minkowski cabe contemplá-lo formalmente como um espaço euclidiano quadridimensional (com coordenada temporal imaginária); a transformação de Lorentz se corresponde com uma rotação do sistema de coordenadas no Universo quadridimensional.

3. SOBRE A CONFIRMAÇÃO DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL PELA EXPERIÊNCIA

Sob uma ótica epistemológica esquemática, o processo de crescimento de uma ciência experimental aparece como um contínuo processo de indução. As teorias emergem como resumos de uma quantidade grande de experiências individuais em leis empíricas, a partir das quais se determinam por comparação as leis gerais. Desde este ponto de vista, a evolução da ciência parece análoga a uma obra de catalogação ou a um produto de mero empirismo. Esta concepção, no entanto, não esgota em modo algum o verdadeiro processo, pois passa por alto o importante papel que desempenham a intuição e o pensamento dedutivo no desenvolvimento da ciência exata. Efetivamente, tão cedo como uma ciência ultrapassa o estado mais primitivo, os progressos teóricos não nascem já de uma simples atividade ordenadora. O pesquisador, animado pelos fatos experimentais, constrói melhor um sistema conceitual que se apóia logicamente num número pelo geral pequeno de supostos básicos que se denominam axiomas. A um sistema conceitual semelhante o chamamos teoria. A teoria obtém a justificativa de sua existência pelo fato de conectar entre si um número grande de experiências isoladas; nisto reside sua verdade. Frente a um mesmo complexo de fatos da experiência pode ter diversas teorias que difiram muito entre si. A coincidência das teorias nas conseqüências acessíveis à experiência pode ser tão profunda que resulte difícil encontrar outras, também acessíveis à experiência, com respeito às quais difiram. Um caso semelhante, e de interesse geral, dá-se por exemplo no terreno da biologia, na Teoria Darwiniana da evolução por seleção na luta pela existência e naquela outra Teoria da Evolução que se funda na hipótese da herança de caracteres adquiridos.
Outro caso semelhante de profunda concordância das conseqüências é o da mecânica newtoniana, por um lado, e a Teoria da Relatividade Geral, por outro. A concordância chega a tal ponto que até agora se puderam encontrar muito poucas conseqüências da Teoria da Relatividade Geral às quais não conduza também a física anterior, e isso apesar da radical diversidade dos supostos básicos de uma e outra teoria. Vamos contemplar aqui de novo estas importantes conseqüências e comentar também brevemente as experiências acumuladas até agora a este respeito.

a) O movimento do periélio do planeta Mercúrio.

Segundo a mecânica newtoniana e a lei de gravitação de Newton, um único planeta que girasse em torno de um sol descreveria uma elipse ao redor dele (ou mais exatamente, ao redor do centro de gravidade comum de ambos). O sol (ou bem o centro de gravidade comum) jaz num dos focos da elipse orbital, de maneira que a distância sol — planeta cresce ao longo de um ano planetário até um máximo, para depois voltar a decrescer até o mínimo. Se em lugar da lei de atração newtoniana se introduz nos cálculos outra diferente, então se comprova que o movimento segundo esta nova lei teria que seguir sendo tal que a distância sol — planeta oscilasse num sentido e outro; mas o ângulo descrito pela linha sol — planeta durante um desses períodos (de periélio a periélio) diferiria de 360°. A curva da órbita não seria então fechada, senão que encheria com o tempo uma porção anular do plano orbital (entre o círculo de máxima e o de mínima distância periélia).

Segundo a Teoria da Relatividade geral, que difere um pouco de a newtoniana, tem que ter também um pequeno deslocamento desta espécie com respeito ao movimento orbital previsto por Kepler-Newton, de maneira que o ângulo descrito pelo raio sol-planeta entre um periélio e o seguinte difira de um ângulo completo de rotação (isto é, do ângulo 2π, na medida angular absoluta que é habitual em física na quantidade

$$\frac{24\,\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)},$$

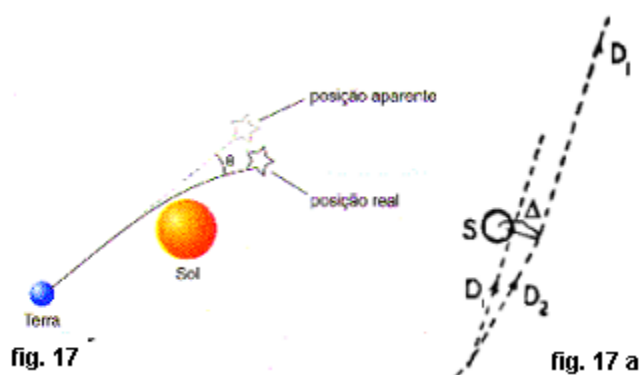
(**a** é o semi-eixo maior da elipse, **e** sua excentricidade, ***c*** a velocidade da luz, **T** o período de revolução). Expresso de outra maneira: segundo a Teoria da Relatividade Geral, o eixo maior da elipse rumo ao redor do Sol no sentido do movimento orbital. Esta rotação é, de acordo com a teoria, de 43 segundos de arco cada 100 anos no caso do planeta Mercúrio, enquanto nos demais planetas do nosso Sol seria tão pequena que escapa a toda constatação. Os astrônomos comprovaram efetivamente que a teoria de Newton não basta para calcular o movimento observado de Mercúrio com a precisão que podem atingir hoje em dia as observações. Depois de ter em conta todas as influências perturbadoras que exercem os demais planetas sobre Mercúrio, comprovou-se (Leverrier, 1859, e Newcomb, 1895) que no movimento do periélio da órbita de Mercúrio ficava sem explicar uma componente que não difere perceptivelmente dos +43 segundos por século que acabamos de mencionar. A imprecisão deste resultado empírico, que concorda com o resultado da Teoria Geral da Relatividade, é de poucos segundos.

b) O deslocamento da luz pelo campo gravitacional

Na seção 22 explicamos que, segundo a Teoria da Relatividade Geral, qualquer raio de luz tem que experimentar no seio de um campo gravitacional uma curvatura que é análoga à que experimenta a trajetória de um corpo ao lançá-lo através desse campo de acordo com a teoria, um raio de luz que passe ao lado de um corpo celeste sofrerá um deslocamento para ele; o ângulo de deslocamento **α**, para um raio luminoso que passe a uma distância de Δ raios solares do Sol, deve ser de

$$\alpha = \frac{1{,}7 \text{ segundos}}{\Delta}$$

Adicionemos que, de acordo com a teoria, a metade deste deslocamento é produto do campo de atração (newtoniano) do Sol; a outra metade, produto da modificação geométrica (curvatura) do espaço provocada por aquele. Este resultado brinda a possibilidade de uma comprovação experimental mediante fotografias estelares tomadas durante um eclipse total de Sol. É necessário esperar este fenômeno porque em qualquer outro momento a atmosfera, iluminada pela luz solar, resplandece tanto que as estrelas próximas ao Sol tornam-se visíveis.

fig. 17 fig. 17 a

O fenômeno esperado se deduz facilmente das figuras 17 e 17a.

Se não existisse o Sol **S**, qualquer estrela situada a distância praticamente infinita se veria na direção **D_1** ,. Mas como conseqüência do deslocamento provocado pelo Sol se a vê na direção **D_2**, isto é, separada do centro do Sol um pouco mais do que em realidade está. A prova se desenvolve na prática da seguinte maneira: Durante um eclipse do Sol se fotografam as estrelas situadas nas imediações daquele. Toma-se além do mais uma segunda fotografia das mesmas estrelas quando o Sol se acha em outro lugar do céu (isto é, alguns meses antes ou depois). As imagens estelares fotografadas durante o eclipse de Sol devem estar então deslocadas radialmente para fora (afastando-se do centro do Sol) com respeito à fotografia de referência correspondendo o deslocamento ao ângulo **α**.
Temos de agradecer à Astronomical Royal Society a constatação deste importante resultado. Sem deixar-se turvar pela guerra nem pelas conseguintes dificuldades de índole psicológica, enviou a vários de seus astrônomos mais marcantes (Eddington, Crommelin, Davidson) e organizou duas expedições com o fim de fazer as fotografias pertinentes durante o eclipse de Sol de 29 de maio de 1919 em Sobral (Brasil) e na ilha Príncipe (África Ocidental).
Os deslocamentos relativos que eram de esperar entre as fotografias do eclipse e as de referência ascendiam tão só a uns poucos centésimos de milímetro. Por conseguinte, as demandas que se impôs à precisão das fotografias e a sua medição não eram pequenas. O resultado da medição confirmou a teoria de maneira muito satisfatória. As componentes transversais dos deslocamentos estelares observadas e calculadas (em segundos de arco) contêm-se na seguinte tabela:

Number of the Star.	First Co-ordinate.		Second Co-ordinate	
	Observed.	Calculated.	Observed.	Calculated.
11 . .	−0·19	−0·22	+0·16	+0·02
5 . .	+0·29	+0·31	−0·46	−0·43
4 . .	+0·11	+0·10	+0·83	+0·74
3 . .	+0·20	+0·12	+1·00	+0·87
6 . .	+0·10	+0·04	+0·57	+0·40
10 . .	−0·08	+0·09	+0·35	+0·32
2 . .	+0·95	+0·85	−0·27	−0·09

O deslocamento para vermelho das riscas espectrais na seção 23 demonstra se que num sistema **K'** que verificada com respeito a um sistema de Galileu **K**, a velocidade de marcha de relógios em repouso e de idêntica constituição depende da posição. Vamos examinar quantitativamente esta dependência. Um relógio colocado a distância **r** do centro do disco tem, com respeito a **K**, a velocidade **v = wr**, onde **w** designa a velocidade de rotação do disco (**K'**) com respeito a **K**. Se chamamos v_0 ao número de golpes do relógio por unidade de tempo (velocidade de marcha) com respeito a **K** quando o relógio está em repouso, então a velocidade de marcha **v** do relógio quando se move com velocidade **v** com respeito a **K** e está em repouso com respeito ao disco é, segundo seção 12,

$$v=v_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

que se pode escrever também, com suficiente precisão, assim

$$v=v_0 \left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

então,

$$v=v_0 \left(1-\frac{w^2}{2}\frac{r^2}{c^2}\right)$$

Se chamamos **+Φ** à diferença de potencial da força centrífuga entre o lugar que ocupa o relógio e o ponto médio do disco, isto é, ao trabalho (com sinal negativo) que há que contribuir na contramão da força centrífuga à unidade de massa para transportá-la desde sua posição no disco móvel até o centro, então temos que

$$\Phi = -\frac{w^2r^2}{2}$$

Com o qual resulta

$$\mathbf{v = v_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)}$$

Daqui se depreende em primeiro lugar que dois relógios idênticos mas colocados a diferente distância do centro do disco marcham a diferente velocidade, resultado que também é válido do ponto de vista de um observador que gire com o disco. Dado que — medido desde o disco — existe um campo gravitacional cujo potencial é **Φ**, o resultado obtido valerá para campos gravitacionais em geral. E como além do mais um átomo que emite riscas espectrais é possível considerá-lo como um relógio, temos o seguinte teorema: Um átomo absorve ou emite uma freqüência que depende do potencial do campo gravitacional no qual se encontra. A freqüência de um átomo que se ache na superfície de um corpo celeste é algo menor do que a de um átomo do mesmo elemento que se encontre no espaço livre (ou na superfície de outro astro menor). Dado que

$$\Phi = \frac{KM}{r},$$

onde **K** é a constante de gravitação newtoniana, **M** a massa e **r** o raio do corpo celeste, deveria produzir-se um deslocamento para o vermelho nas riscas espectrais geradas na superfície das estrelas se as comparamos com as geradas na superfície da Terra, concretamente na quantia

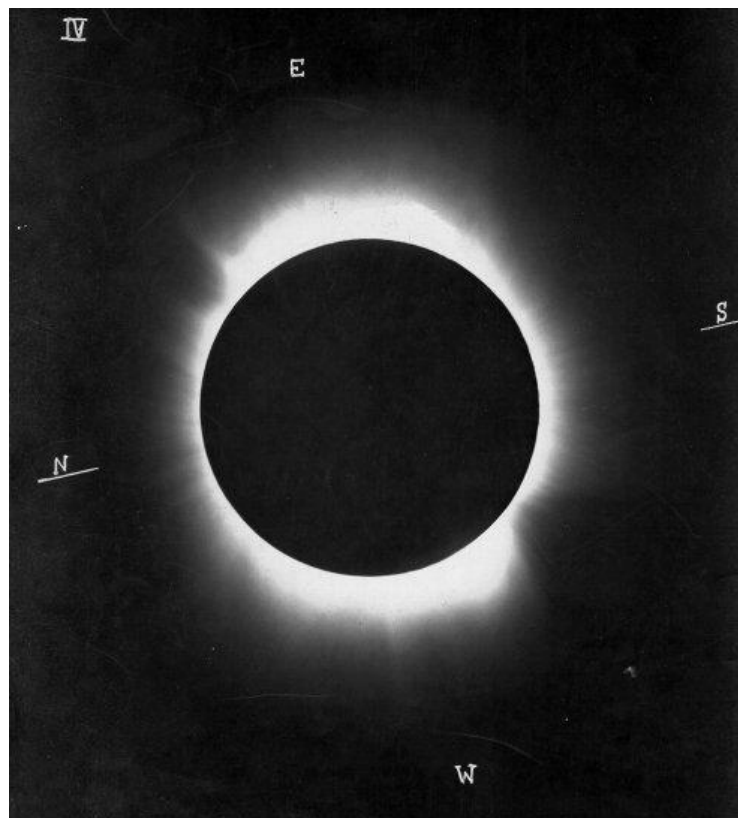
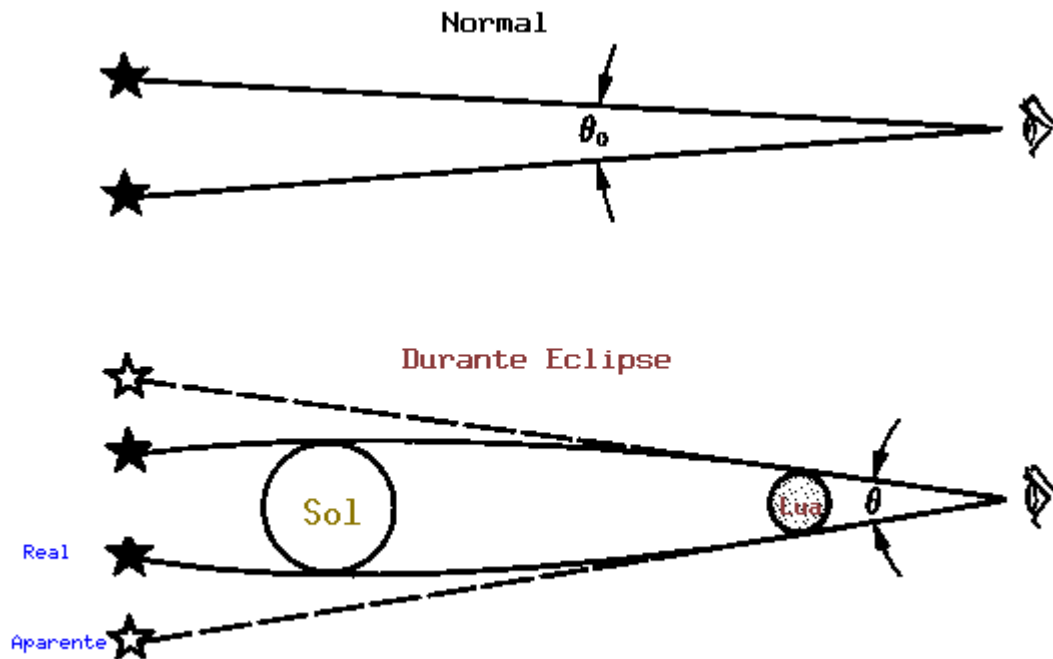
$$\frac{v - v_0}{v_0} = -\frac{KM}{c^2 r}$$

No Sol, o deslocamento para o vermelho que deveria esperar-se é de uns dois milionésimos de comprimento de onda. No caso das estrelas fixas não é possível fazer um cálculo confiável, porque em geral não se conhece nem a massa **M** nem o raio **r**. Que este efeito exista realmente ou não é uma questão aberta em cuja solução trabalham atualmente com grande zelo os astrônomos. No caso do Sol é difícil julgar a existência do efeito por ser muito pequeno. Enquanto Grebe e Bachem (Bonn) — sobre a base de suas próprias medições e das de Evershed e Schwarzschild na assim chamada banda cyan — bem como Perot (sobre a base de observações próprias) consideram provada a existência do efeito, outros pesquisadores, especialmente W. H.Julius e S. Sohn, são da opinião contrária ou não estão convictos da força probatória do anterior material empírico.

Nas investigações estatísticas realizadas sobre as estrelas fixas não há dúvida de que existem a meio-termo deslocamentos das riscas espectrais para o extremo das ondas longas do espectro. No entanto, a elaboração que se fez até agora do material não permite ainda nenhuma decisão a respeito de se esses movimentos se devem realmente ao efeito da gravitação. O leitor poderá encontrar no trabalho de E. Freundlich Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie (Die Naturwissenschaften, 1919, H. 35, p. 520, Verlag Jul. Spinger, Berlim) uma re-

compilação do material empírico, junto a uma análise detida desde o ponto de vista da questão que aqui nos interessa. Em qualquer caso, os anos vindouros trarão a decisão definitiva. Se não existisse esse deslocamento para o vermelho das riscas espectrais devido ao potencial gravitacional, a Teoria da Relatividade Geral seria insustentável. Por outro lado, o estudo do deslocamento das riscas espectrais, caso de que se demonstre que sua origem está no potencial gravitacional, proporcionará conclusões importantes sobre a massa dos corpos celestes.

NOTA DO TRADUTOR

A Teoria da Relatividade Geral é universal no sentido de ser válida mesmo nos casos em que os campos gravitacionais não são negligíveis. Trata-se na verdade da teoria da gravidade, descrevendo a gravitação como a ação das massas nas propriedades do espaço e do tempo, que afetam o movimento dos corpos e outras propriedades físicas. Enquanto na teoria de Newton o espaço é rígido, descrito pela geometria Euclidiana [Euclides de Alexandria (c.365-300 a.C.)], na Relatividade Geral o espaço-tempo é distorcido pela presença da matéria que ele contém. Um ano depois de propor a Relatividade Geral, em 1917, Einstein publicou seu artigo histórico sobre cosmologia, *Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade*, construindo um modelo esférico do Universo. Como as equações da Relatividade Geral não levavam diretamente a um Universo estático de raio finito, mesma dificuldade encontrada com a teoria de Newton, Einstein modificou suas equações, introduzindo a famosa constante cosmológica, para obter um Universo estático, já que ele não tinha nenhuma razão para supor que o Universo estivesse se expandindo ou contraindo. A constante cosmológica age como uma força repulsiva que previne o colapso do Universo pela atração gravitacional. O holandês Willem de Sitter (1872-1934) demonstrou em 1917 que a constante cosmológica permite um Universo em expansão mesmo se ele não contivesse qualquer matéria e, portanto, ela é também chamada de energia do vácuo. As observações mostram que o Universo é homogêneo em escalas de 10 a 100 milhões de anos luz e maiores. Para escalas menores, podemos ver estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias, mas em larga escala os elementos de volume são homogêneos. A hipótese que o Universo seja homogêneo e isotrópico é chamada de *Princípio Cosmológico*.
A previsão da Relatividade Geral de que um raio de luz é desviado ao passar por um corpo massivo foi confirmada em 1919 por uma expedição dupla chefiada pelo astrônomo inglês *Sir* Arthur Stanley Eddington (1882-1944), a Sobral, no Ceará, e à ilha de Príncipe, na África, para medir a posição das estrelas durante um eclipse total do Sol. A expedição ao Brasil foi coordenada pelo inglês Andrew Claude de la Cherois Crommelin (1865-1939), e retornou com 7 boas fotografias.
Em Sobral a visão foi melhor que na ilha de Príncipe.
Desse episódio ficou famosa uma frase pronunciada por Einstein algum tempo depois: "O problema concebido por meu cérebro foi resolvido pelo luminoso céu do Brasil".

Uma das imagens obtidas em 1919 em Sobral, do acervo da biblioteca do Observatório Nacional.

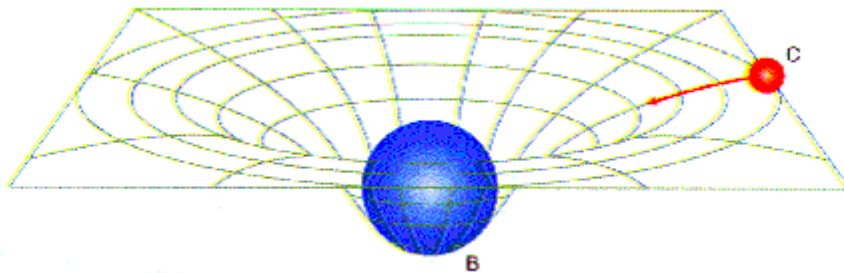
Medindo a distância entre as estrelas à esquerda do Sol e as estrelas à direita do Sol durante o eclipse, quando as estrelas estão visíveis pelo curto espaço de tempo do eclipse, e comparando com medidas das mesmas estrelas obtidas 6

meses antes, quando elas eram visíveis à noite, Eddington encontrou que as estrelas pareciam mais distantes umas das outras durante o eclipse. Isto implica que os raios de luz destas estrelas foram desviados pelo campo gravitacional do Sol, como predito por Einstein. O desvio previsto era de

$$\theta - \theta_0 = \frac{1{,}7 \text{ segundos de arco}}{\Delta},$$

a uma distância de Δ raios do Sol do centro do Sol. As duas expedições obtiveram 1,98± 0,30" e 1,61± 0,30", confirmando a teoria. A única razão de realizar estas medidas durante um eclipse é que durante um eclipse podemos enxergar e medir as estrelas próximas ao disco do Sol.

Einstein ao explicar a atração gravitacional entre corpos, introduz a noção de espaço curvo e abandona definitivamente a noção newtoniana de força.

Os corpos produzem em torno de si uma curvatura do espaço, quanto maior a massa do corpo, maior a curvatura. Na figura abaixo podemos entender o que ocorre, por analogia. Nela temos uma bola de ferro (**B**) colocada sobre uma tela elástica. A bola de ferro deforma a superfície de modo que o corpo **C** vai em direção a **B** não porque haja uma força de atração, mas sim porque segue a linha do espaço curvo.

A teoria de Einstein previa que a luz também seria atraída pelos corpos, mas esse efeito seria pequeno e, assim, só poderia ser observado quando a luz passasse perto de corpos de grande massa, como por exemplo o Sol.

4. A ESTRUTURA DO ESPAÇO EM CONEXÃO COM A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Nosso conhecimento sobre a estrutura global do espaço (problema cosmológico) experimentou, desde a aparição da primeira edição deste livro, uma evolução importante, que é preciso mencionar inclusive numa exposição de caráter divulgativo. Minhas iniciais considerações sobre este problema se baseavam em duas hipótese:

1. A densidade média de matéria em todo o espaço é diferente de **u** é igual em todas partes.

2. A magnitude (ou o raio) do Universo é independente do tempo.

Estas duas hipóteses demonstraram ser compatíveis segundo a Teoria da Relatividade Geral, mas unicamente quando se adicionava às equações de campo um termo hipotético que nem era exigido pela própria teoria nem também não parecia natural do ponto de vista teórico (termo cosmológico das equações de campo). A hipótese 2 me parecia ao amadurecimento inevitável, pois por aquele então pensava que, de separar-se dela, se cairia em especulações sem limite. No entanto, o matemático russo Friedman descobriu, lá pelos anos vinte, que do ponto de vista puramente teórico era mais natural uma suposição diferente. Efetivamente, Friedman se deu conta de que era possível manter a hipótese 1 sem introduzir nas equações de campo da gravitação o pouco natural termo cosmológico, sempre que se decidisse prescindir da hipótese 2. Pois as equações de campo originais admitem uma solução na qual o raio do mundo depende do tempo (espaço em expansão). Neste sentido cabe afirmar com Friedman que a teoria exige uma expansão do espaço.

Hubble demonstrou poucos anos depois, através de suas investigações espectrais em nebulosas extragalácticas, que as riscas espectrais emitidas por elas mostram um deslocamento para o vermelho que cresce regularmente com a distância da nebulosa. Segundo os conhecimentos atuais, este deslocamento só cabe interpretá-lo, no sentido do princípio de Doppler, como um movimento de expansão do sistema estelar inteiro, tal e como, segundo o estudo de Friedman, exigem as equações de campo da gravitação. Por conseguinte, neste sentido a descoberta de Hubble pode interpretar-se como uma confirmação da teoria. Propõe-se aqui, no entanto, uma curiosa dificuldade. A interpretação (teoricamente quase indubitável) dos deslocamentos das riscas galácticas achados por Hubble como uma expansão obriga a situar a origem desta faz tão só uns 109 anos, enquanto a astronomia física tem por provável que a evolução das estrelas e dos sistemas estelares precisou tempos muito maiores. Hoje por hoje não está nem muito menos claro como superar estas incongruências. Assinalemos também que a Teoria do Universo em expansão, junto com os dados empíricos da astronomia, não permite nenhuma decisão a respeito da finitude ou infinitude do espaço (tridimensional), enquanto a hipótese estática original do espaço tinha predito um caráter fechado (finitude) para o espaço.

5. A RELATIVIDADE E O PROBLEMA DO ESPAÇO

É característico da teoria de Newton que se tenha que atribuir ao espaço e ao tempo, e também à matéria, uma existência real independente. Pois na lei de movimento newtoniana aparece o conceito de aceleração, e a aceleração, nesta teorias pode significar aceleração com respeito ao espaço. O espaço newtoniano há que imaginar-se em repouso, ou ao menos não acelerado, para que a aceleração que aparece na lei do movimento possa contemplar-se como uma magnitude com sentido. E analogamente para o tempo, que também entra no conceito de aceleração. O próprio Newton, e aqueles de seus contemporâneos que gozavam a mais sentido crítico, viam como algo perturbador o fato de ter que

descrever realidade física do espaço e mesmo seu estado de movimento. Mas por aquele então não tinha outra saída se se queria atribuir à Mecânica um sentido claro.

O atribuir realidade física ao espaço, e em especial ao espaço vazio, já de per si uma dura ousadia. Os filósofos resistiram uma e outra vez, desde os tempos mais antigos, a cometê-la. Descartes argumentava mais ou menos assim: o espaço é em essência igual a extensão. Mas a extensão vai vinculada aos corpos; depois nenhum espaço sem corpos, isto é, não há espaço vazio. O ponto fraco desta forma de inferência reside em primeiro lugar no seguinte: é verdadeiro que o conceito de extensão deve sua origem a experiências relativas à posição (contato) de corpos sólidos. Mas daí não cabe inferir que o conceito de extensão não esteja justificado em outros casos que não tenham motivado a formação do conceito.

Semelhante ampliação dos conceitos pode justificar-se também indiretamente por seu valor para o entendimento de achados empíricos. Portanto, a afirmação de que a extensão vai unida aos corpos é em si infundada. No entanto, veremos mais adiante do que a Teoria da Relatividade Geral confirma a concepção de Descartes através de um artifício. O que levou Descartes a uma concepção tão curiosamente atrevida foi seguramente a sensação de que a um objeto não diretamente experimentável[24] como é o espaço não se lhe podia atribuir nenhuma realidade sem que tivesse uma necessidade urgente de fazê-lo.

A origem psicológica do conceito de espaço, ou de sua necessidade, não é nem muito menos tão evidente como pudesse parecê-lo se nos deixássemos guiar por nossos hábitos de pensamento. Os antigos geômetras se ocuparam de objetos mentais (reta, ponto, superfície), mas não realmente do espaço em si, como fez mais tarde a geometria analítica. O conceito de espaço vem no entanto sugerido por determinadas experiências primitivas. Imaginemos que fabricamos uma caixa. Dentro dela se podem alojar objetos em determinada disposição, de maneira que a caixa se encha. A possibilidade de semelhantes disposições é uma propriedade do objeto corpóreo caixa, algo que vem dado com a caixa, o espaço compreendido na caixa. É algo que difere segundo as caixas, algo que com toda naturalidade se o imagina independente de se há ou não objetos nelas. Quando não há objetos na caixa, seu espaço aparece vazio. Até aqui nosso conceito de espaço vai unido à caixa.

No entanto, comprova-se que as possibilidades de alojamento que constituem o espaço da caixa são independentes de que grossura tenham as paredes. Não se pode fazer que a grossura desça a zero sem que ao mesmo tempo se jogue a perder o espaço? A naturalidade deste processo de passagem ao limite é evidente, subsistindo agora em nosso pensamento o espaço sem caixa, uma coisa independente que, no entanto, parece tão irreal quando se esquece a procedência do conceito. Entende-se que para Descartes lhe repugnasse contemplar o espaço como uma coisa independente dos objetos corpóreos e que podia existir sem

[24] Esta expressão há que a tomar cum grão salis.

matéria[25]. (O qual não lhe impede, no entanto, tratar o espaço como conceito fundamental em sua geometria analítica). Uma simples indicação ao esvaziamento do termômetro de mercúrio desarmou seguramente aos últimos cartesianos. Mas não é de negar que inclusive neste estado primitivo há um pouco de insatisfatório no conceito de espaço, ou no espaço concebido como coisa real e independente.
As maneiras que se podem alojar os corpos no espaço (caixa) constituem o objeto da geometria euclidiana tridimensional, cuja estrutura axiomática faz facilmente esquecer que se refere a situações experimentáveis. Uma vez formado da maneira antes esboçada o conceito de espaço, com base nas experiências sobre o recheio da caixa, o que temos é um espaço limitado. Mas esta limitação parece não essencial, porque é evidente que sempre se pode introduzir uma caixa maior que encerre a menor. O espaço aparece bem como algo que é ilimitado. Não vou falar aqui de que as concepções da tridimensionalidade e a euclidicidade do espaço procedem de experiências (relativamente primitivas), senão que considerarei primeiro o papel do conceito de espaço na evolução do pensamento físico segundo outros pontos de vista.

Se uma caixa menor **c** se acha em repouso relativo no interior do espaço oco de outra maior **C**, então o espaço oco ou cavidade de **c** é uma parte da cavidade de **C**, e ambas caixas pertencem ao mesmo espaço que as contém. A interpretação é, no entanto, menos singela quando **c** se move com respeito a **C**. Nos inclina então a pensar que **c** encerra sempre o mesmo espaço, mas ocupando uma porção variável do espaço **C**. Então é necessário atribuir a cada caixa seu espaço particular (não concebido como limitado) e supor que estes dois espaços se movem um com respeito ao outro.

Antes de acatar-nos esta complicação, o espaço aparece como um meio limitado (contido) em cujo seio nadam os objetos corpóreos. Agora, no entanto, há que se pensar que existem infinitos espaços que se acham em mútuo movimento. O conceito de espaço como algo que existe objetivamente, com independência das coisas é próprio já do pensamento pré-científico, mas não assim a idéia da existência de um número infinito de espaços em mútuo movimento. Ainda que esta idéia é logicamente inevitável, não desempenhou durante muito tempo nenhum papel marcante, nem sequer no pensamento científico. Que dizer, no entanto, da origem psicológica do conceito de tempo? Este conceito tem indubitavelmente que ver com o fato do recordar, bem como com a distinção entre experiências sensoriais e a recordação das mesmas. De é questionável que a distinção entre experiência sensorial e recordação (ou simples imaginação) seja algo que nos venha dado de maneira psicologicamente imediata. Qualquer um de nós conhece a dúvida entre se viveu algo com os sentidos ou se só o sonhou. É provável que esta distinção não nasça senão como ato do entendimento ordenador. Ao recordação se lhe atribui uma vivência que se reputa anterior às vivências presentes.

[25] A tentativa de Kant de sufocar o mal-estar negando a objetividade do espaço mal pode tomar-se a sério. As possibilidades de alojamento, encarnadas pelo espaço interior da caixa, são objetivas no mesmo sentido que o são a própria caixa e os objetos que se podem alojar nela.

É este um princípio de ordenação conceitual para vivências (imaginadas) cuja viabilidade dá pé ao conceito de tempo subjetivo, isto é, esse conceito de tempo que remete à ordenação das vivências do indivíduo.

Objetivação do conceito de tempo. Exemplo. A pessoa **A** (eu) tem a vivência caiu um raio. A pessoa **A** vivencia ao mesmo tempo um comportamento da pessoa **B** que estabelece uma conexão entre este comportamento e a própria vivência de cai um raio. Pois bem como **A** atribui a **B** a vivência cai um raio. Na pessoa **A** nasce a idéia de que nesse cai um raio participam também outras pessoas. O cai um raio não se concebe já como uma vivência exclusivamente pessoal, senão como vivência (ou finalmente só como vivência potencial) de outras pessoas. Deste modo nasce a idéia de que cai um raio, que em origem apareceu na consciência como vivência, pode interpretar-se agora também como um acontecimento (objetivo). Mas a essência de todos os eventos é aquilo ao que nos referimos quando falamos do mundo real de afora.
Temos visto que tendemos a atribuir às vivências uma ordenação temporal do tipo: Se **β** é posterior a **α** e **γ** posterior a **β**, então **γ** também é posterior a **α** (seriação das vivências). Que ocorre neste aspecto com os eventos que atribuímos às vivências. De imediato é supor que existe uma ordenação temporal dos eventos e que essa ordenação coincide com a das vivências. Isso é o que se supôs com caráter geral — e inconscientemente — até que se fizeram valer certas dúvidas céticas[26] . Para aceder a uma objetivação do mundo faz falta outra idéia construtiva: o acontecimento (evento) está localizado também no espaço, não só no tempo.

No que antecede tentamos relatar como se pode estabelecer uma relação psicológica entre os conceitos de espaço, tempo e acontecimento, por uma parte, e as vivências, por outra. Contemplados logicamente, são criações livres da inteligência humana, ferramentas do pensamento que devem servir para relacionar vivências e compreendê-las assim melhor. A tentativa de tomar consciência das fontes empíricas destes conceitos básicos mostra até que ponto estamos realmente unidos a estes conceitos. Deste modo nos fazemos conscientes de nossa liberdade,cujo uso razoável em caso de necessidade é sempre um assunto duro. A este esquema relativo à origem psicológica dos conceitos de espaço-tempo-eventos (os chamaremos brevemente tipo espaço, em contraposição aos conceitos da esfera psicológica) temos que adicionar algo essencial. Conectamos o conceito de espaço com vivências com caixas e com o alojamento de objetos corpóreos dentro delas. Esta formação conceitual pressupõe já, portanto, o conceito de objeto corpóreo (p. ex., caixa). E neste contexto também desempenham o papel de objetos corpóreos as pessoas que teve que introduzir para a formação de um conceito objetivo de tempo. Se me cabe, portanto, que a formação do conceito de objeto corpóreo deve preceder a nossos conceitos de tempo e espaço. Todos estes conceitos tipo espaço

[26] A ordenação temporal de vivências adquirida por via acústica pode, por exemplo, diferir da ordenação temporal adquirida visualmente, com o qual não cabe identificar sem mais a ordenação temporal dos acontecimentos com a ordenação temporal das vivências.

pertencem já ao pensamento pré-científico,junto a conceitos da esfera psicológica, como dor, meta, propósito, etc. O pensamento físico, e o das ciências naturais em geral, caracteriza-se por pretender arrumar-se em princípio com conceitos tipo espaço unicamente e aspirar a expressar com eles todas as relações regulares. O físico tenta reduzir cores e tons a vibrações; o fisiologista, pensamento e dor a processos nervosos, de tal modo que o psíquico como tal fica eliminado do nexo causal do ser, isto é, não aparece por nenhum lado como elo independente nas relações causais. Esta atitude, que considera teoricamente possível o entendimento de todas as relações mediante o emprego exclusivo de conceitos tipo espaço, é seguramente o que se entende atualmente por materialismo (depois de que a matéria tenha perdido seu papel como conceito fundamental). Por que é necessário baixar os conceitos fundamentais do pensamento científico de seus campos olímpicos platônicos e tentar desvelar sua origem terrestre? Resposta: para liberá-los do tabu que levam pendurado e conseguir assim maior liberdade na formação de conceitos. O ter introduzido esta reflexão crítica é mérito imperecível de D. Hume e E. Mach em primeira linha.

A ciência tomou os conceitos de espaço, tempo e objeto corpóreo (com o importante caso especial corpo sólido) do pensamento pré-científico, precisou-os e os modificou. Seu primeiro lucro importante foi a criação da geometria euclidiana, cuja formulação axiomática não deve fazer-nos esquecer sua origem empírica (possibilidades de alojamento de corpos sólidos). De origem empírica é também, em particular, a tridimensionalidade do espaço, bem como seu caráter euclidiano (é possível enchê-lo com cubos idênticos sem deixar resquício). A sutileza do conceito de espaço se viu acrescentada pela descoberta de que não existem corpos totalmente rígidos. Todos os corpos se deformam elasticamente e mudam de volume ao variar a temperatura. Por isso, os objetos cujas possíveis colocações pretende descrever a geometria euclidiana não se podem especificar à margem do conteúdo da física.

Mas, dado que a Física tem que fazer uso da Geometria desde o momento em que estabelece seus conceitos, o conteúdo empírico da geometria não pode ser especificado e contrastado senão no marco da física como um todo. Neste contexto há que mencionar também o atomismo e sua concepção da divisibilidade finita, pois os espaços de extensão subatômica não se podem medir. O atomismo obriga também a abandonar teoricamente a idéia de superfícies limítrofes e estaticamente definidas em corpos sólidos. Em rigor não existem então leis independentes para as possibilidades de alojamento de corpos sólidos, nem sequer no terreno macroscópico. Apesar de tudo, ninguém pensou em abandonar o conceito de espaço, porque parecia imprescindível nesse sistema global da ciência natural tão magnificamente credenciado. Mach foi o único que no século XIX pensou seriamente em eliminar o conceito de espaço, tentando substituí-lo pelo conceito do conjunto das distâncias atuais de todos os pontos materiais. (E fez esta tentativa com o fim de chegar a uma concepção satisfatória da inércia.)

O campo. O espaço e o tempo desempenham na mecânica newtoniana um papel duplo. Em primeiro lugar, como suporte ou marco para o acontecer físico, com respeito ao qual os eventos vêm descritos pelas coordenadas espaciais e o tempo. A matéria é vista em essência como composta de pontos materiais cujos movimentos constituem o acontecer físico. Quando se a concebe como contínua é em certo modo com caráter provisório e naqueles casos nos que não se quer ou não se pode descobrir a estrutura discreta. Então se dispensa o tratamento de pontos materiais a pequenas partes (elementos de volume) da matéria, ao menos na medida em que se trate simplesmente de movimentos e não de processos cuja redução a movimentos não fosse possível ou conveniente (p. ex., variações de temperatura, processos químicos). O segundo papel do espaço e do tempo era o de sistema inercial. Dentre todos os sistemas de referência imagináveis, os inerciais se distinguiam pelo fato de que com respeito a eles era válido o princípio de inércia.

O essencial nisto é que o fisicamente real, imaginado como independente dos sujeitos que o vivenciam, interpretava-se — ao menos em teoria — como composto de espaço e tempo, por um lado, e de pontos materiais permanentemente existentes e em movimento com respeito àqueles, por outro. A idéia da existência independente do espaço e do tempo cabe expressá-la drasticamente assim: Se desaparecesse a matéria, ficariam unicamente o espaço e o tempo (como uma espécie de palco para o acontecer físico). A superação deste ponto de vista resultou de uma evolução que a princípio não parecia guardar nenhuma relação com o problema do espaço-tempo: a aparição do conceito de campo e sua aspiração final de substituir o conceito de partícula (ponto material). No marco da física clássica, o conceito de campo se instalou como conceito auxiliar naqueles casos em que se tratava a matéria como um contínuo. No estudo da condução do calor num sólido, por um caso, o estado se descreve especificando a temperatura em cada ponto do corpo e em cada instante de tempo. Matematicamente quer dizer: a temperatura **T** é representada como expressão matemática (função) da coordenação espacial com o tempo **t** (campo de temperaturas). A lei da condução do calor se representa como uma relação local (equação diferencial) que compreende todos os casos especiais daquela. A temperatura é aqui um singelo exemplo do conceito de campo: uma magnitude (ou um complexo de magnitudes) que é função das coordenadas e do tempo.

Outro exemplo é a descrição do movimento de um fluido. Em cada ponto e em cada instante existe uma velocidade que vem descrita quantitativamente por suas três componentes com respeito aos eixos de um sistema de coordenadas (vetor). As componentes da velocidade num ponto (componentes do campo) são também aqui funções das coordenadas (**x y z**) e do tempo (**t**). Os campos mencionados se caracterizam por aparecer unicamente no interior de uma massa ponderal; o único que pretendem é descrever um estado dessa matéria. Ali onde não tinha matéria não podia existir também não — de acordo com a gênese do conceito — nenhum campo.

No primeiro quarto do século XIX se comprovou, no entanto, que os fenômenos de interferência e movimento da luz admitiam uma explicação assombrosamente nítida se se interpretava a luz como um campo de ondas completamente análogo ao campo de oscilações mecânicas num sólido elástico. Foi então necessário introduzir um campo que pudesse existir inclusive em ausência de matéria ponderal, no vácuo.

Este estado de coisas criou uma situação paradoxal, porque o conceito de campo, de acordo com sua origem, parecia limitar-se a descrever estados no interior de um corpo ponderal. O qual parecia tanto mais seguro quanto que existia a convicção de que todo campo tinha que o conceber como um estado mecanicamente interpretável, pressupondo isso a presença de matéria. Viu-se assim a necessidade de supor por todos os lados, inclusive nesse espaço que até então se reputava vácuo, a existência de uma matéria que se denominou éter. A forma em que o conceito de campo se sacudiu o julgo imposto por um substrato material pertence aos processos psicologicamente mais interessantes na evolução do pensamento físico. Na segunda metade do século XIX, e a raiz das investigações de Faraday e Maxwell, viu-se cada vez mais claro do que a descrição dos processos eletromagnéticos com ajuda da idéia do campo era muito superior a um tratamento baseado em conceitos de pontos mecânicos. Maxwell, graças à introdução do conceito de campo na Eletrodinâmica, conseguiu predizer a existência das ondas eletromagnéticas, cuja fundamental identificação com as ondas luminosas era indubitável, ainda que só fosse pela igualdade de suas velocidades de propagação.

Como conseqüência disso, a Ótica ficou absorvida em princípio pela Eletrodinâmica. Um dos efeitos psicológicos deste imponente sucesso foi que o conceito de campo adquiriu paulatinamente maior autonomia frente ao marco mecanicista da física clássica. Apesar de tudo, deu-se num princípio supondo que os campos eletromagnéticos tinha que os interpretar como estados do éter, e se tentou com grande zelo explicar estes estados como mecânicos. Tiveram que fracassar várias tentativas para que se começasse a renunciar pouco a pouco à interpretação mecânica, persistindo no entanto o convencimento de que os campos eletromagnéticos eram estados do éter. Assim estavam as coisas por volta do século.

A teoria do éter trouxe consigo a pergunta de como se comporta mecanicamente o éter frente aos corpos ponderais. Participa dos movimentos dos corpos ou estão suas partes em repouso mútuo? Muitos foram os experimentos engenhosos que se realizaram para dirimir esta questão. Como fatos que eram importantes neste contexto entravam também em consideração a aberração das estrelas fixas como conseqüência do movimento anual da Terra, bem como o efeito Doppler (influência do movimento relativo das estrelas fixas sobre a freqüência da luz que chega até nós e que possui uma freqüência de emissão conhecida).

Os resultados destes fatos e experimentos (salvo um, o experimento de Michelson-Morley) explicou-os H. A. Lorentz com a hipótese de que o éter não participa dos movimentos dos corpos ponderais e de que as partes do éter não têm absolutamente nenhum movimento relativo mútuo. O éter aparecia assim em certo modo como a encarnação de um espaço absolutamente em repouso. Mas a investigação de Lorentz deu além do mais outros frutos. Explicou os processos eletromagnéticos e ópticos então conhecidos no interior dos corpos ponderais, supondo para isso que o influxo da matéria ponderal sobre o campo elétrico (e ao inverso) deve-se exclusivamente a que as partículas da matéria portam cargas elétricas que participam do movimento das partículas. Em relação com o experimento de Michelson-Morley demonstrou H. A. Lorentz que seu resultado não estava ao menos em contradição com a teoria do éter em repouso.

Pese a todos estes sucessos tão formosos, o estado da teoria não era do tudo satisfatório, pela seguinte razão. A Mecânica Clássica, da qual não "cabia duvidar" que era válida com grande aproximação, postula a equivalência de todos os sistemas inerciais (ou espaços inerciais) para a formulação das leis da natureza (invariância das leis da natureza com respeito a passagem de um sistema inercial a outro). Os experimentos eletromagnéticos e ópticos demonstraram o mesmo com grande exatidão, enquanto o fundamento da Teoria Eletromagnética postulava o privilégio de um sistema inercial especial, a saber, o do éter lumínífero em repouso. Esta concepção do fundamento teórico era demasiado insatisfatória. Não cabia alguma modificação deste que respeitasse — como a Mecânica Clássica — a equivalência dos sistemas inerciais (Princípio da Relatividade Especial)?

A resposta a esta pergunta é a Teoria da Relatividade Especial, que toma da de Maxwell-Lorentz a hipótese da constância da velocidade da luz no vácuo. Para fazer que esta hipótese seja compatível com a equivalência dos sistemas inerciais (Princípio da Relatividade Especial) há de abandonar o caráter absoluto da simultaneidade aparte disso, seguem-se daí as transformações de Lorentz para o tempo e para as coordenadas espaciais, que permitem passar de um sistema inercial a outro. O conteúdo inteiro da Teoria da Relatividade Especial se contém no postulado seguinte: as leis da natureza são invariantes com respeito às transformações de Lorentz. A importância deste requisito reside em que restringe de maneira muito determinada as possíveis leis da natureza.

Qual é a postura da Teoria da Relatividade Especial frente ao problema do espaço? Antes de mais nada há que se guardar a opinião de que foi esta teoria a que introduziu o caráter quadridimensional da realidade. Também na Mecânica Clássica vêm localizados os fatos (eventos) mediante quatro números, três coordenadas espaciais e outra temporal; a totalidade dos eventos físicos se concebe, pois, como imersa numa variedade contínua quadridimensional. Mas, segundo a Mecânica Clássica, este contínuo quadridimensional se descompõe objetivamente num tempo unidimensional e em seções espaciais tridimensionais que só contêm eventos tridimensionais. Esta decomposição é a mesma para todos os sistemas inerciais.

A simultaneidade de dois eventos determinados com respeito a um sistema inércia! implica a simultaneidade destes eventos com respeito a todos os sistemas inerciais. Isto é o que deve entender-se quando se diz que o tempo da Mecânica Clássica é absoluto. Na Teoria da Relatividade Especial já não é assim. A idéia do conjunto de eventos que são simultâneos a outro determinado existe em relação a um determinado sistema inercial, mas já não com independência da eleição do sistema inercial. O contínuo quadridimensional não se decompõe já objetivamente em seções que contêm todos os eventos simultâneos; o agora perde para o mundo, espacialmente extenso, seu significado objetivo. Daí que se tenha que conceber espaço e tempo, objetivamente indissolúveis, como um contínuo quadridimensional se se quer expressar o conteúdo das relações objetivas sem arbitrariedades convencionais e prescindíveis. A Teoria da Relatividade Especial, ao demonstrar a equivalência física de todos os sistemas inerciais, pôs às claras o caráter insustentável da hipótese do éter em repouso. Teve que renunciar por isso à idéia de interpretar o campo eletromagnético como estado de um substrato material. O campo se converte assim num elemento irredutível da descrição física, e irreduzível mesmo sentido que o conceito de matéria na Teoria Newtoniana.

Até aqui centramos o atendimento ao tema de até que ponto a Teoria da Relatividade Especial modificou os conceitos de espaço e tempo. Vamos nos fixar agora naqueles elementos que a teoria tomou da Mecânica Clássica. Igual a esta, na Relatividade Especial as leis da natureza só aspiram a validade quando a descrição espaço-tempo se baseia num sistema inercial. O princípio de inércia e o da constância da velocidade da luz somente são válidos com respeito a um sistema inercial. Também as leis do campo aspiram fazer sentido e validade com respeito a sistemas inerciais unicamente. Portanto, igual que na Mecânica Clássica, o espaço é, também aqui, uma componente independente da representação do fisicamente real. O espaço (inercial) — ou com mais exatidão, este espaço, junto com o correspondente tempo — é o que fica ao suprimir mentalmente a matéria e o campo. Esta estrutura quadridimensional (espaço de Minkowski) concebe-se como suporte da matéria e do campo. Os espaços inerciais, com seus correspondentes tempos, são só sistemas de coordenadas quadridimensionais privilegiados que se relacionam entre si através de transformações lineares de Lorentz. Dado que nesta estrutura quadridimensional já não há seções que representem objetivamente o agora, o conceito de ocorrer e devir não é que fique eliminado completamente, mas sim se complica. Parece, portanto, mais natural imaginar o fisicamente real como um ser quadridimensional em lugar de contemplá-lo, como até então, como o devir de um ser tridimensional. Este espaço quadridimensional rígido da Teoria da Relatividade Especial é em certo modo o homólogo quadridimensional do éter tridimensional rígido de H. A. Lorentz.

Para esta teoria vale também o enunciado: a descrição dos estados físicos pressupõe o espaço como algo que vem dado de antemão e que leva uma existência independente. Quer dizer-se que esta teoria também não elimina o receio de Descartes em ponto à existência autônoma, inclusive a priori, do espaço vazio. O mostrar até que ponto a Teoria da Relatividade Geral supera estas reservas é a verdadeira meta destas reflexões elementares.

O conceito de espaço na Teoria da Relatividade Geral. Esta teoria nasceu em princípio da tentativa de compreender a igualdade entre massa inercial e massa gravitacional. Parte-se de um sistema inercial **S1** cujo espaço está fisicamente vazio. Quer dizer isto que na porção de espaço considerada não existe nem matéria (no sentido usual) nem um campo no sentido da Teoria da Relatividade Especial. Seja **S2** um segundo sistema de referência uniformemente acelerado com respeito a **S1**. **S2** não é, pois, um sistema inercial.

Com respeito a **S2** qualquer massa de prova se moveria aceleradamente, e além do mais independentemente de sua constituição física e química. Com respeito a **S2** existe por tanto um estado que — ao menos em primeira aproximação — não cabe distinguir de um campo gravitacional. O estado de coisas que se percebe é por tanto compatível com a seguinte concepção: também **S2** é equivalente a um sistema inercial, mas com respeito a **S2** existe um campo gravitacional (homogêneo) cujo origem não nos preocupa neste contexto.

Por conseguinte, se se inclui o campo gravitacional no marco das considerações então o sistema inercial perde seu significado objetivo, desde que este princípio de equivalência se possa estender a qualquer movimento relativo dos sistemas de referência. Se é possível fundamentar nestas idéias básicas uma teoria consistente, então satisfará de por si o fato, empiricamente muito bem fundado, da igualdade entre massa inercial e gravitacional. Quadridimensionalmente, a passagem de **S1** a **S2** corresponde a uma transformação não linear das quatro coordenadas. Propõe-se então a pergunta: que transformações não lineares devem permitir-se?, ou melhor, como deve generalizar-se a transformação de Lorentz? Para responder a esta pergunta é decisiva a seguinte reflexão.

Ao sistema inercial das teorias anteriores se lhe atribui a propriedade de que as diferenças de coordenadas se medem por meio de hastes rígidas (em repouso) e as diferenças temporais mediante relógios (em repouso). A primeira suposição se complementa com a hipótese de que para as possibilidades de colocação relativa das réguas em repouso valem os teoremas sobre segmentos da geometria euclidiana. Dos resultados da Teoria da Relatividade Especial se infere então, mediante considerações elementares, que esta interpretação física direta das coordenadas se joga a perder para sistemas de referência (**S2**) acelerados com respeito a sistemas inerciais (**S1**). Mas nesse caso as coordenadas só expressam já a ordem do justaposto (e com isso o grau de dimensões do espaço), mas não as propriedades métricas do espaço. Desta maneira se chega a estender as transformações a quaisquer transformações contínuas[27]. Isto é o que implica a Teoria da Relatividade Geral. As leis da natureza têm que ser covariantes com respeito a quaisquer transformações contínuas das coordenadas. Este requisito (em conjunção com o da máxima simplicidade lógica das leis) restringe as possíveis leis naturais de um modo incomparavelmente mais forte do que o Princípio da Relatividade Especial. O raciocínio se baseia essencialmente no campo como conceito independente.

[27] Sirva aqui esta maneira de expressar-nos, ainda que não seja exata.

Pois as condições que prevalecem com respeito a **S2** se interpretam como campo gravitacional, sem que se proponha a questão da existência de massas que engendrem o campo. E este raciocínio permite também compreender por que as leis do campo gravitacional puro estão conectadas mais diretamente com a idéia da Relatividade. O raciocínio se baseia essencialmente no campo como conceito independente. Pois as condições que prevalecem com respeito a **S2** se interpretam como campo gravitacional, sem que se proponha a questão da existência de massas que engendrem o campo. E este raciocínio permite também compreender por que as leis do campo gravitacional puro estão conectadas mais diretamente com a idéia da Relatividade Geral que as leis para campos de classe geral (quando existe um campo eletromagnético, por exemplo). Pois temos boas razões para supor que o espaço de Minkowski livre de campo representa um caso especial permitido pelas leis da natureza, e em particular o caso especial mais singelo que cabe imaginar. Um espaço semelhante se caracteriza, em relação a sua propriedade métrica, pelo fato de que $dx^2_1 + dx^2_2 + dx^2_3$ é o quadrado da distância espacial, medida com uma haste unidade, entre dois pontos infinitesimalmente próximos de uma seção espacial tridimensional (Teorema de Pitágoras), enquanto dx_4 é a distância temporal — medida com uma unidade de tempo conveniente — entre dois eventos com (**x1, x2, x3**) comuns. De aqui se deduz — como é fácil mostrar com ajuda das transformações de Lorentz — que a quantidade

$$ds^2 = dx^2_1 + dx^2_2 + dx^2_3 - dx^2_4 \quad (1)$$

possui um significado métrico objetivo. Matematicamente corresponde este fato com a circunstância de que ds^2 é invariante com respeito a transformações de Lorentz. Se, no sentido do princípio da Relatividade geral, submete-se agora este espaço a uma transformação de coordenadas arbitrária mas contínua, essa quantidade objetivamente significativa se expressa no novo sistema de coordenadas pela relação

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (1a)$$

onde há que somar nos sub-índices **i** e **k** em todas suas combinações 11, 12, ...até 44. Agora , as g_{ik} já não são constantes, senão funções das coordenadas, e vêm determinadas pela transformação arbitrariamente eleita. Apesar disso, as g_{ik} não são funções arbitrárias das novas coordenadas, senão precisamente funções tais que a forma (a) possa transformar-se de novo na forma (**1**) mediante uma transformação contínua das quatro coordenadas. Para que isto seja possível, as funções g_{ik} têm que se verificar certas equações geralmente covariantes que B. Riemann derivou mais de meio século antes do estabelecimento da Teoria da Relatividade Geral (condição de Riemann). Segundo o princípio de equivalência, (**1a**) descreve em forma geralmente covariante um campo gravitacional de tipo especial,sempre que as g_{ik} cumpram a condição de Riemann.
Por conseguinte, a lei para o campo gravitacional puro de tipo geral deve verificar-se as seguintes condições.

Deve satisfazer-se quando se satisfaz a condição de Riemann; mas deve ser mais débil, isto é, menos restritiva do que a condição de Riemann. Com isso fica praticamente determinada por completo a lei de campo da gravitação pura, coisa que não vamos fundamentar aqui com mais detalhe. Agora já estamos preparados para ver até que ponto o passo à Teoria da Relatividade Geral modifica o conceito de espaço. Segundo a Mecânica Clássica e segundo a Teoria da Relatividade Especial, o espaço (espaço-tempo) tem uma existência independente da matéria ou do campo. Para poder descrever aquilo que preenche o espaço, aquilo que depende das coordenadas, há que imaginar que o espaço tempo, ou o sistema inercial com suas propriedades métricas, vem dado desde o princípio, porque se não careceria de sentido a descrição de aquilo que preenche o espaço[28]. Pelo contrário, segundo a Teoria da Relatividade geral, o espaço não tem existência peculiar à margem de aquilo que enche o espaço, daquilo que depende das coordenadas. Seja, por exemplo, um campo gravitacional puro descrito pelas $\mathbf{g_{ik}}$ (como funções das coordenadas) mediante resolução das equações gravitacionais. Se suprimimos mentalmente o campo gravitacional, isto é, as funções $\mathbf{g_{ik}}$, o que fica não é algo bem como um espaço do tipo (**1**), senão que não fica absolutamente nada, nem sequer um espaço topológico. Pois as funções $\mathbf{g_{ik}}$ descrevem não só o campo, senão ao mesmo tempo também a estrutura e propriedades topológicas e métricas da variedade. Um espaço do tipo (**1**) é, no sentido da Teoria da Relatividade Geral, não um espaço sem campo, senão um caso especial do campo $\mathbf{g_{ik}}$ para, o qual as $\mathbf{g_{ik}}$ (para o sistema de coordenadas empregado, que em si não tem nenhum significado objetivo) possuem valores que não dependem das coordenadas;o espaço vazio, isto é, um espaço sem campo, não existe.

Por conseguinte, Descartes não estava tão confuso ao crer-se obrigado a excluir a existência de um espaço vazio. Semelhante opinião parece certamente absurda enquanto uno só veja o fisicamente real nos corpos ponderais. É a idéia do campo como representante do real, em combinação com o Princípio da Relatividade Geral, a que mostra o verdadeiro miolo da idéia cartesiana: não existe espaço livre de campo.

Teoria da gravitação generalizada. A teoria do campo gravitacional puro, firmemente assentada sobre a Teoria da Relatividade Geral, é facilmente acessível porque podemos confiar em que o espaço de Minkowski livre de campo com a métrica de (**1**) tem que se corresponder com as leis gerais do campo. A partir deste caso especial se segue a lei de gravitação mediante uma generalização praticamente isenta de toda arbitrariedade. A ulterior evolução da teoria não está tão univocamente determinada pelo Princípio da Relatividade Geral; nos últimos decênios teve tentativas em diferentes direções. Todos eles têm em comum a interpretação do fisicamente real como campo, sendo este uma generalização do campo gravitacional e a lei do campo uma generalização da lei

[28] Se se suprime mentalmente aquilo que enche o espaço (p. ex., o campo), fica ainda o espaço métrico segundo (1), que também seria determinante para o comportamento inercial de um corpo de prova introduzido nele.

para o campo gravitacional puro. Creio que agora, depois de longas sondagens, achei a forma mais natural para esta generalização[29]; mas até a data não consegui averiguar se esta lei generalizada resiste ou não a confrontação com os fatos experimentais.

Para as considerações gerais que antecedem é secundário conhecer a lei do campo concreta. A questão principal é atualmente a de se uma teoria de campo como a que aqui nos interessa pode sequer levar-nos ao objetivo. Referimo-nos a uma teoria que descreva exaustivamente o fisicamente real (com inclusão do espaço quadridimensional) mediante um campo. A presente geração de físicos se inclina por contestar negativamente a esta pergunta; opinam, em concordância com a forma atual da Teoria Quântica, que o estado de um sistema não se pode caracterizar direta senão só indiretamente, mediante especificação da estatística das medidas realizadas no sistema; prevalece a convicção de que a natureza dual(corpuscular e ondulatória), confirmada experimentalmente, só pode atingir-se mediante um debilitamento semelhante do conceito de realidade. Minha opinião é que nossos conhecimentos reais não justificam uma renúncia teórica de tão longo alcance, e que não se deveria deixar de estudar até o final o caminho da Teoria de Campos Relativista.

FIM

[29] A generalização cabe caracterizá-la do seguinte modo. O campo gravitacional puro dos $\mathbf{g}_{ik}$ possui,de acordo com sua derivação a partir do espaço de Minkowski esvazio, a propriedade de simetria $\mathbf{g}_{ik}$ = $\mathbf{g}_{ik}$ ($\mathbf{g}_{12}$= $\mathbf{g}_{21}$, etc.). O campo generalizado é da mesma classe, mas sem essa propriedade de simetria. A derivação da lei do campo é completamente análoga à do caso especial da gravitação pura.